Skript Mathematik

Analysis II: Exponentialfunktionen

Version: 22. September 2018

Roland Stewen

stewen.rvk@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

e-Funktion

In diesem Kapitel wollen wir die e-Funktion untersuchen. Dies erlaubt uns Potenzfunktionen (also ein x im Exponenten) zu untersuchen. Solche Funktionen sind uns schon bei den Halbwertszeiten begegnet: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x/T_\mathrm{h}}$, ($T_\mathrm{h}$) ist die Halbwertszeit) und bei den Zinseszinsen: $f(x) = (1 + p/100)^x$ (p ist der Zinssatz). Auch solche Funktionen will man ableiten können, um das Wachstum zu bestimmen. Bei komplizierteren Funktionen natürlich auch lokale Maxima und Minima.

Die E-Funktion wird entwickelt aus der Fragestellung eine Funktion zu finden, deren Ableitung wieder die ursprüngliche Funktion ergibt. Dieses Kapitel ist nicht zwingend notwendig, um Aufgaben zu rechnen bzw. die Mathematik anzuwenden.

Daran anschließend werden Ableitungen und Integrale geübt, Sie bekommen Gelegenheit Graphen anhand der Funktionen zu skizzieren und die Verfahren zum Lösen von Exponentialgleichungen werden wiederholt. Anschließend werden verschiedene Anwendungen vorgestellt.

Wichtige Anwendungen sind die Möglichkeit Ableitungen zu bilden von Exponentialfunktionen wie 2^x usw. wie sie beim Zinseszins, Halbwertzeit usw. vorkommen.

Durch geschickte Konstruktion kann man Funktionen konstruieren, die sich immer größer werdend nur zwischen zwei Werten bewegen. Also wie ein gedrehtes S aussehen. Das sind dann Wachstumsfunktionen.

Im wirklichen Leben (z. Bsp. in der Physik) ist es oft so, das man einen Zusammenhang zwischen einer gesuchten Funktion und ihrer Ableitung hat. Solche Gleichungen nennt man dann Differenzialgleichungen. Manche dieser Gleichungen kann man mit Hilfe der e-Funktion lösen.

Die e-Funktion wird wird geschrieben als e^x oder als $\exp(x)$.

1.1 Bestimmen der Funktion

In diesem Abschnitt wollen wir ausgehen von der Fragestellung, ob es eine Funktion gibt, deren Ableitung dieselbe Funktion ergibt:

$$f'(x) = f(x)$$

Wenn man so eine Funktion gefunden hat (wenn es sie denn gibt), ist sie sicherlich nicht eindeutig, denn es gilt offenbar:

$$g(x) = 2f(x) = 2f'(x) = g'(x)$$

Wir fordern also, ohne einer wirklichen Einschränkung[1], dass die Funktion die y-Achse bei 1 schneiden soll:

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x) \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

Wir werden diese Fragestellung in 4 Schritten beantworten. Dabei werden grundlegende Überlegungen aus der Differenzialrechnung wiederholt werden. Insgesamt ist diese Herleitung sicherlich auch anspruchsvoll. Vielleicht ist nicht jeder Schritt sofort einsichtig oder klar. Trotzdem können Sie weiterlesen und dann aus den nächsten Überlegungen etwas lernen. Die ersten beiden Schritte sollten Sie auf jeden Fall lesen. Den dritten Schritt zumindest überfliegen. Der letzte Schritt geht dann eher in die Tiefe der Mathematik.

1. Eigenschaften der gesuchten Funktion und die Erstellung eines Graphen.
2. Die Entwicklung der Potenzreihe. Damit ist die Funktion streng genommen dann gegeben. Man (z. B. der Computer) kann kann sie damit ausrechnen.
3. Bestimmung des Grenzwertes e. Dies wird die Basis unserer Exponentialfunktion werden.
4. Zeigen, dass sich aus den obigen Bedingungen tatsächlich die Exponentialfunktion ergibt.

1.1.1 Eigenschaften

Aus den beiden Bedingungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x) \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

[1] Eine Funktion, bei der es einen Wert mit $f(a) = 0$ gibt wird dann die triviale Funktion $f(x) = 0$ sein. Siehe dazu Kap.: 1.1.1. Diese Funktion $f(x) = 0$ interessiert allerdings nicht.

sollen Eigenschaften der Funktion f ermittelt werden.

Als erstes werden wir sehen, dass diese Funktion keine Nullstelle haben kann ohne immer konstant null zu sein.

Dann werden wir uns überlegen, wie der Graph dieser Funktion (sofern es sie gibt) aussehen könnte.

Dann sehen Sie ein Bild der Funktion und anschließend wird das Integral dieser Funktion interpretiert.

Nullstelle

Kann die Funktion mit den geforderten zwei Eigenschaften eine Nullstelle haben?

Nun, wenn es eine Stelle $x = a$ gäbe mit $f(a) = 0$, dann hieße das:

$$0 = f(a) = f'(a) = f''(a) = f'''(a) = ...$$

Dann verändert sich die Funktion aber auch nicht, wenn man ein bisschen nach rechts oder links geht. Dann ist nicht nur an der Stelle die Steigung (f'(a)) null, sondern auch die Krümmung (f"(a)). Es ist sicherlich einsehbar, dass die Funktion ein kleines bisschen rechts von a immer noch null ist. Damit ist aber klar, dass dann die Funktion immer null ist.

Wenn f nicht trivial sein soll (also nicht $f(x) = 0$), dann darf f(x) keine Nullstelle haben. Wenn also die Funktion die y-Achse schneidet, bei einem Wert ungleich null, dann kann man ihn auch auf 1 normieren durch entsprechende Vorfaktoren.

Extremstelle

Kann die Funktion überhaupt eine Extremstelle haben?

Da die Funktion nicht null werden kann, kann auch die Ableitung niemals null werden, denn Ableitung und die Funktion sind ja identisch.

Dann gibt es aber auch keine Extremstelle.

Bild

Wir gehen von dem Punkt aus, der bekannt ist: (0|1). Gehen wir ein Stückchen nach rechts, dann wird der y-Wert der Funktion größer, den $f(0) = f'(0) = 1$ und damit ist auch die Steigung positiv.

Also steigt die Funktion. Dann aber steigt auch die Steigung. So wächst die Funktion ständig. D. h. die Funktion ist (zumindest ab $x = 0$) streng monoton steigend.

Was passiert vorher?

Nun, die Funktion hat sicherlich auch da jeweils eine positive Steigung, nur kleiner werdend.

Die Funktion kann keine Extremstelle haben, weil sie (und damit die 1. Ableitung) keine Nullstelle hat. Ebenfalls hat Sie keine Wendestelle, weil sie keine Nullstelle hat (und damit auch die 2. Ableitung) keine Nullstelle hat.

Warum hat die Funktion keine Polstelle?
Hätte Sie eine Polstelle dann entweder mit oder ohne Vorzeichenwechsel.

1. Mit Vorzeichenwechsel
   Angenommen $f(x)$ hätte bei a eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Die Funktion geht durch den Punkt $(0|1)$. Dann hätte die Funktion am Ast bei $x = 0$ positive Werte und eine positive Steigung. Am anderen Ast aber eine negative y-Werte (da Vorzeichenwechsel). Dann aber müsste sie auch eine negative Steigung haben, also vom $-\infty$ noch weiter absinken ... Das geht sicherlich nicht!

2. Ohne Vorzeichenwechsel
   Angenommen $f(x)$ hätte bei a eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Die Funktion geht durch den Punkt $(0|1)$. Dann hätte die Funktion an einem Ast positive y-Werte und eine positive Steigung (nach oben) und auf der anderen Seite positive Werte und eine negative Steigung. Das darf aber nicht sein, denn es gilt ja: $f(x) = f'(x)$.

Das bedeutet, dass die Funktion streng monoton steigend ist, ohne eine Nullstelle zu haben. Sie geht also für große x-Werte gegen unendlich (da die Steigung immer größer wird) und für negative x-Werte gegen null.

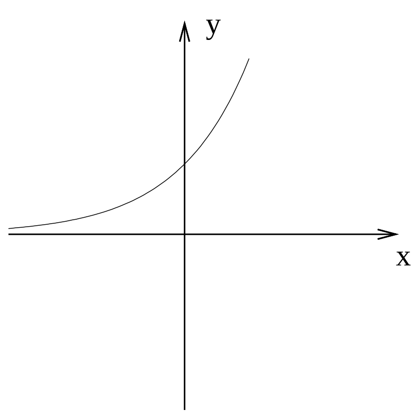


Abbildung 1.1: $f(x) = f'(x)$

Die Fläche bis x_0 ist gegeben durch:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^{x_0} f(z)\,dz = \lim_{a\to-\infty} f(x)|_a^{x_0} = \lim_{a\to-\infty} f(x_0) - f(a) = f(x_0)$$

Der Funktionswert $f(x_0)$ ist also die Maßzahl der Fläche von $-\infty$ bis x_0.

1.1.2 Potenzreihe

Angenommen es gilt, da $(f(0) = 1$:

$$f(x) = 1$$

dann muss auch gelten $(f(x) = f'(x))$:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1 + x$$

das aber bedeutet: $(f(x) = f'(x))$:

$$f'(x) = 1 + x \Rightarrow f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

das aber bedeutet: $(f(x) = f'(x))$:

$$f'(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3$$

...

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ...$$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...\cdot 1$ also $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$
Eine solche Funktion nennt man **Potenzreihe**. So eine Reihe ist unendlich lang. Wenn es für ein x einen Grenzwert geben soll, muss der Vorfaktor bei großen Exponenten immer kleiner werden.

1.1.3 Grenzwert e

Die Frage, die sich stellt, ist, ob es z. B. für

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}...$$

einen Grenzwert (also eine reelle Zahl) gibt, oder ob der Wert unendlich groß ist.

1. Mit jedem Summanden wird der Ausdruck größer.

$$f(1) = 1$$
$$f(1) = 1 + 1$$
$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2}$$
$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}$$

usw.
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... \cdot 1$ z. B:: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

2. Um die Fakultäten einschätzen zu können, wollen wir uns dessen bedienen, was wir kennen. Ab n=4 gilt: $n! > n^2$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > 5^2$$
$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > 6^2$$
$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > 7^2$$

Wenn man die größere Zahl im Nenner schreibt, erhält man eine kleiner Zahl:

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}$$

Es gilt also:

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} ... < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5^2} ...$$

ab der 5 ersetzen wir die Nenner mit der Fakultät (!) durch Ausdrücke mit dem Quadrat.

Wir müssen also zeigen, dass der rechte Term einen Grenzwert hat, dann hat der linke Term erst recht einen Grenzwert, denn er steigt immer, und ist kleiner als die rechte Seite.

Hier bedienen wir uns eines Tricks!

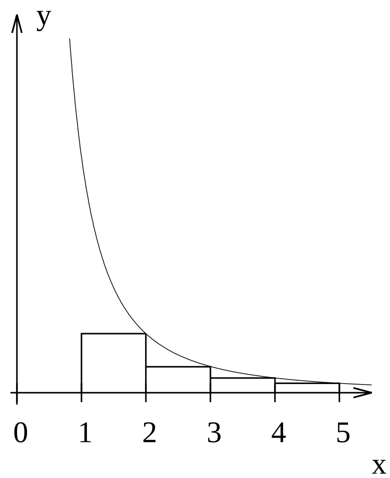


Abbildung 1.2: Dargestellt ist in den Rechtecken die Fläche $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3!}$, $\frac{1}{4!}$ usw. und die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$, die alle Rechtecke an ihrer rechten oberen Ecke schneidet.

Der Trick besteht darin, dass die Fläche des Integrals sicherlich größer ist als die Fläche der Rechtecke. Also gilt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} ... < 1 + \lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + \lim_{n\to\infty} \left.\frac{-1}{x}\right|_2^n = 0{,}5$$

(denn dies ist ein Uneigentliches integral)

Also ersetzen wir unsere unendliche Reihe durch das Integral:

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} ... < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5^2} ...$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5^2} ... < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \int_2^x \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + 0{,}5$$

Letztendlich gilt in ganz grober Näherung:

$$f(1) < 3{,}21$$

Das aber heißt, dass es einen Grenzwert, also eine reelle Zahl, für $f(1)$ geben muß. Diese Zahl nennen wir der Einfachheit halber: e.

e ist die Eulersche Zahl und es gilt:

$$e = 2{,}7182818...$$

e ist genauso wie π eine reelle Zahl, die sich durch keinen Bruch darstellen lässt.

1.1.4 Die e-Funktion

In diesem Abschnitt soll nun die Funktion ermittelt werden, die die beiden Bedingungen erfüllt.

Dazu bilden wir zwei Funktionen

$$\begin{aligned} g(x) &= f(nx) \\ h(x) &= (f(x))^n \qquad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Für beide Funktionen gilt, dass sie die y-Achse am selben Punkt schneiden:

$$g(0) = f(n \cdot 0) = f(0) = 1$$

$$h(0) = (f(0))^n = 1^n = 1$$

Also:

$$g(0) = h(0) = 1$$

Für die Ableitungen gilt:

$$g'(x) = n \cdot f'(nx) = n \cdot f(nx) = ng(x)$$

$$h'(x) = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x) = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f(x) = n \cdot (f(x))^n = nh(x)$$

Also:

$$\begin{aligned} g'(x) &= ng(x) \\ h'(x) &= nh(x) \end{aligned}$$

Da beide Funktionen einen gemeinsamen Punkt $(0|1)$ haben, haben sie auch eine gemeinsame Steigung an diesem Punkt. Die weiteren Ableitungen an diesem Punkt sind dann auch identisch. Dann sind die Punkte von g nahe bei $x = 1$ gleich zu h. Dass lässt sich fortsetzen, so dass alle Punkte von g und h sich als gleich erweisen.

Also gilt:

$$g(x) = \mathbf{f(nx)} = \mathbf{(f(x))^n} = h(x)$$

Im folgenden Abschnitt zeigen wir, dass folgendes gilt:

$$f(x) = (f(1))^x = e^x$$

Bisher wissen wir nur, dass für n aus den natürlichen Zahlen gilt:

$$f(nx) = (f(x))^n$$

Jedes x lässt sich näherungsweise (x darf eine reellle Zahl sein) als Bruch schreiben.

$$x = \frac{r}{s}$$

$r, s \in \mathbb{R}$

$$f(r) = f(1 \cdot r) = (f(1))\, r = e^r$$

$$\underbrace{f(\frac{1}{q}) \cdot ... \cdot f(\frac{1}{q})}_{q \text{ mal}} = \left(f(\frac{1}{q})\right)^q = f(q\frac{1}{q}) = f(1) = e$$

Also gilt:

$$f(\frac{1}{q}) = \sqrt[q]{e} = e^{\frac{1}{q}}$$

Beide Regeln zusammen ergeben:

$$f(x) = e^x$$

1.1.5 Überblick

- $f(x) = e^x$ und $f'(x) = e^x$.
- $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 ...$$
- Die Basis e ist eine reelle Zahl, die sich nicht als Bruch darstellen lässt. Ein Näherungswert ist im Anhang gegeben.

1.1.6 Hilfestellungen zum Rechnen

Zum Rechnen benötigen Sie jetzt noch ein paar Hilfestellungen.

Das Integral

Oftmals soll man eine e-Funktion integrieren:

$$f(x) = 3e^{5x+7}$$

Was ist dann die Aufleitung?

$$F(x) = \frac{3}{5}e^{5x+7}$$

Wenn man $F(x)$ ableitet, dann ist $f(x)$ einfach nur $F(x)$ mit 5 multipliziert:

$$F'(x) = 5 \cdot \frac{3}{5}e^{5x+7} = 5 \cdot F(x) = f(x)$$

Beispiele:

$$\begin{array}{rclcrcl} f(x) & = & e^{4x+3} & & F(x) & = & 0{,}25e^{4x+3} \\ f(x) & = & 10e^{5x+3} & & F(x) & = & 2e^{5x+3} \end{array}$$

Der natürliche Logarithmus

Ohne eine genauere Einführung sei schon hier die Umkehrfunktion zur e-Funktion „verraten“: $\ln(x)$. Diese Funktion nennt man den „natürlichen“ Logarithmus.

Beispiele:

1.
$$\begin{array}{rcll} e^x & = & 5 & | \text{ x wird bestimmt durch die Umkehrfunktion} \\ x & = & \ln(5) & \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcll} e^{3x+5} & = & 12 & | \ \ln \text{ auf beide Seiten angewendet} \\ 3x+5 & = & \ln(12) & \end{array}$$

Die Logarithmusgesetze:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$$
$$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$$

Die Gesetze helfen bei Rechnungen:

$$\begin{array}{rcll} 5 \cdot e^{3x+1} & = & 10 & | \ \ln \text{ von den beiden Seiten bilden} \\ \ln(5 \cdot e^{3x+1}) & = & \ln(10) & | \ \text{1. Log-gesetz} \\ \ln(5) + \ln(e^{3x+1}) & = & \ln(10) & | \ \ln \text{ ist die Umkehrfkt. zur e-Fkt.} \\ \ln(5) + (3x+1) & = & \ln(10) & | \ -\ln(5) \\ 3x+1 & = & \ln(10) - \ln(5) & | \ \text{2. Log-gesetz} \\ 3x+1 & = & \ln(\frac{10}{5}) & \\ 3x+1 & = & \ln(2) & | \ -1 \\ 3x & = & \ln(2) - 1 & | \ :3 \\ x & = & \frac{\ln(2)-1}{3} & \end{array}$$

Ableitung von Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis

Als Beispiel sei hier die Ableitung der Funktion 2^x bestimmt.

$$\begin{aligned} e^a &= 2 \quad &\mid \text{ ln auf beide Seiten angewendet} \\ a &= \ln(2) \end{aligned}$$

Also gilt $\ln(2)$ für a eingesetzt:

$$e^{\ln(2)} = 2$$

Nun können wir 2^x zur Basis e schreiben und die Ableitung bestimmen.

$$f(x) = 2^x = \left(e^{\ln(2)}\right)^x = e^{\ln(2)\,x}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich:

$$f'(x) = \ln(2)\,e^{\ln(2)\,x} = \ln(2)\,2^x$$

Nullstellen

Hilfreich bei der Bestimmung von Nullstellen ist die Tatsache, dass die e-Funktion keine Nullstellen für reelle Zahlen hat.

Beispiel:

$$\begin{aligned} (x+2)e^x &= 0 \quad &\mid \text{ da } e^x \neq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ (x+2) &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

(Zur Erinnerung: Ein Produkt ist dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist.)

Vergleich mit den Potenzfunktionen

Die E-Funktion wächst und fällt schneller als jeder Potenzfunktion. D. h.:

1. $$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

   Obwohl x immer größere negative Werte annimmt, geht e^x „immer schneller“ gegen null.

2. $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

   Obwohl x immer größere Werte annimmt, und somit $1/x$ gegen null geht, nimmt e^x immer noch größere Werte an, so dass der Bruch insgesamt unendlich groß wird.

Warum ist das so?
Nun, $f(x) = x$ wächst linear. D. h. die Geschwindigkeit (die 1. Ableitung) ist konstant. Bei e^x ist die 1. Ableitung wieder eine wachsende Funktion: e^x.

Wenn die Geschwindigkeit schneller steigt von e^x, dann wächst e^x immer schneller als $f(x) = x$.

Bei $f(x) = x^2$ ist die Beschleunigung (die 2. Ableitung) konstant. Bei e^x ist die 2. Ableitung immer noch eine wachsende Funktion: e^x.

Bei $f(x) = x^3$ ist die 3. Ableitung konstant. Bei e^x ist die 3. Ableitung immer noch eine wachsende Funktion: e^x.

...

Bei $f(x) = x^n$ ist die n. Ableitung konstant. Bei e^x ist die n. Ableitung immer noch eine wachsende Funktion: e^x.

1.2 Einführende Aufgaben

Aufgabe 1.1

$f(x)$	$f'(x)$
e^{5x+7}	
e^{-3x}	
e^{-2x-3}	
$5 \cdot e^{3x}$	
$2^x = e^{\ln(2)\,x}$	

(Lösung siehe Seite 24).

Aufgabe 1.2

$f(x)$	$f'(x)$
$(x+1)\,e^x$	
$(-2x+5)\,e^x$	
$(-3x-4)\,e^{-2x}$	
$x\,e^{3x+5}$	
$(-x+2)\,e^{-x}$	
$x^2\,e^{-x}$	
$(-x^2+x)\,e^{-x}$	
$e^2 \cdot x$	

(Lösung siehe Seite 24).

Aufgabe 1.3 Erweiterung

$f(x)$	$f'(x)$
$e^{(x^2)}$	
$\sqrt{x}\,e^x$	
$x\,e^{(x^2)}$	
$e^{(e^x)}$	
$e^{\sqrt{x}}$	

(Lösung siehe Seite 25).

Aufgabe 1.4 Erweiterung

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{6}{e^x+2}$	
$\frac{5}{e^{-x}+3}$	
$\frac{e^x+1}{e^x-3}$	
$\frac{e^x-5}{e^{-x}+7}$	
$\frac{x\,e^x}{e^x+1}$	
$\frac{x}{e^x+3}$	
$\frac{x}{e^{-x}+x}$	

(Lösung siehe Seite 25).

Aufgabe 1.5 Bestimmen Sie die Stammfunktion (Erweiterung)

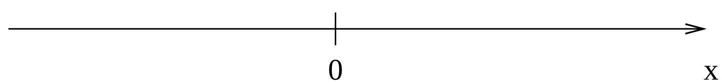
$f(x)$	$F(x)$
e^{2x}	
e^{4x}	
e^{-x}	
$6\,e^{3x}$	
$4\,e^{2x+3}$	
$12\,e^{3x+5}$	
$4\,e^{-2x+3}$	

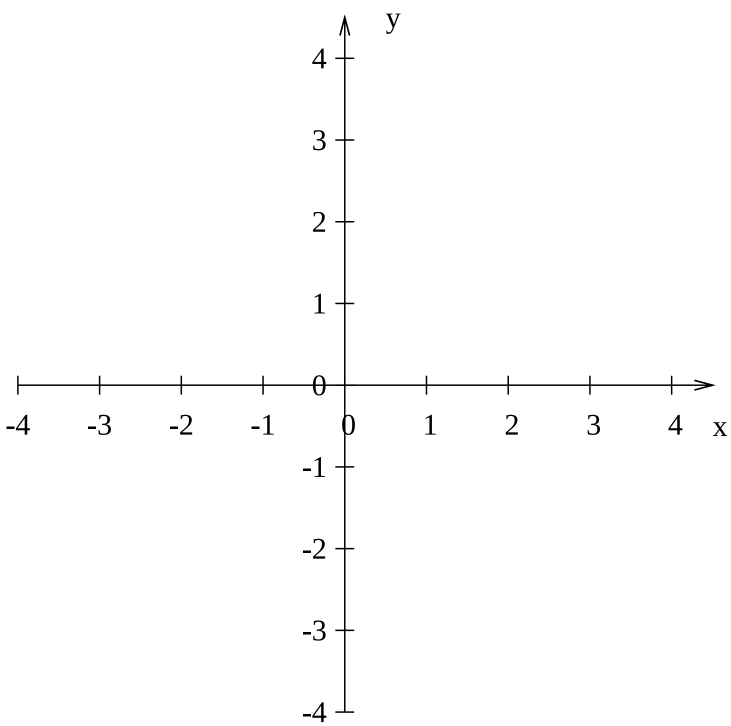
(Lösung siehe Seite 26).

Aufgabe 1.6 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = x\,e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: ____________________
2. Nullstellen: ________________________________
3. Definitionslücken (und Art): ________________________________
4. $\lim_{x\to\infty} f(x)$: ____________________
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: ____________________
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:



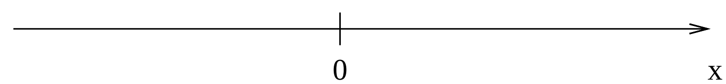


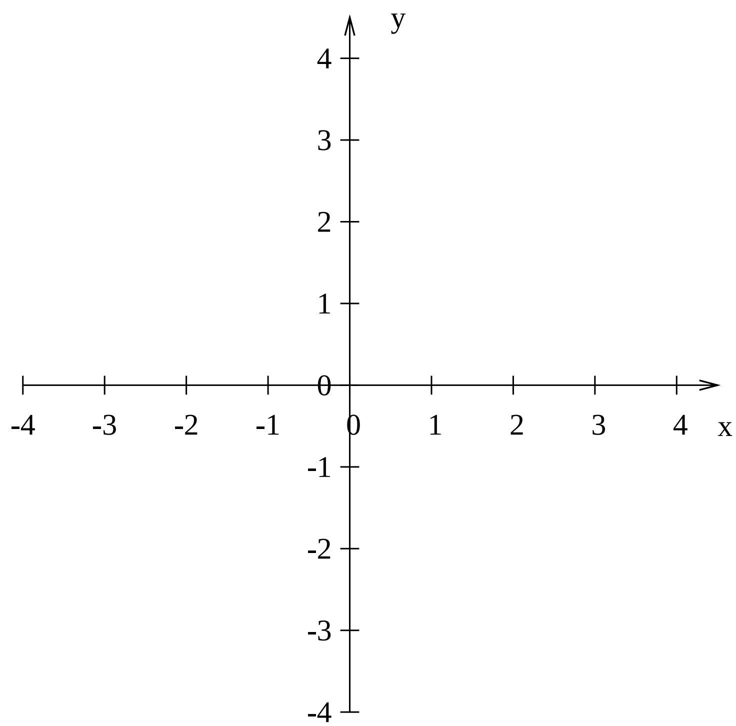
(Lösung siehe Seite 28).

Aufgabe 1.7 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = (x+1)\,e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: ______________________
2. Nullstellen: ____________________________________
3. Definitionslücken (und Art): ____________________________________
4. $\lim_{x\to\infty} f(x)$: ______________________
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: ______________________
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:



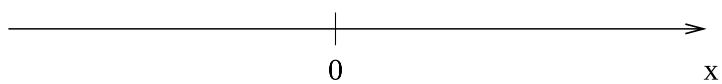


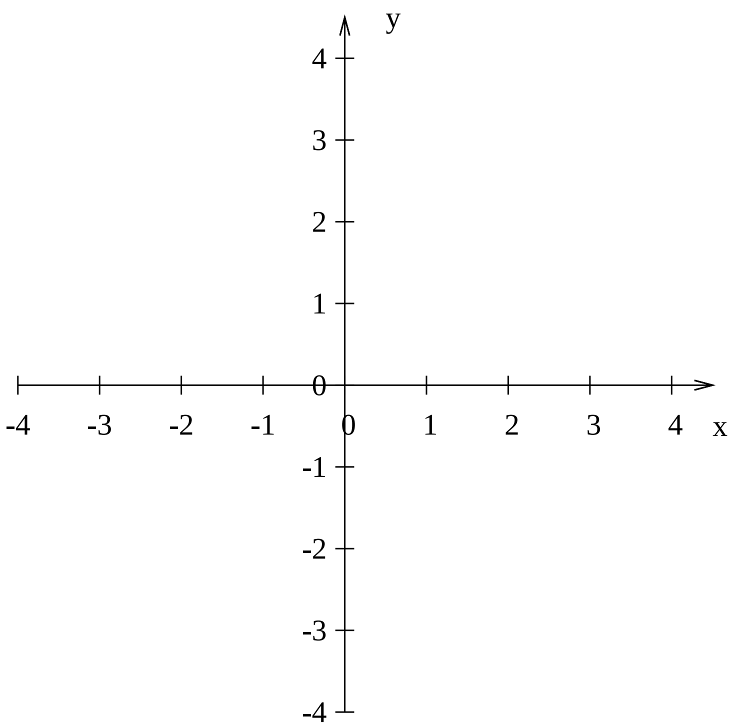
(Lösung siehe Seite 29).

Aufgabe 1.8 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = (-x + 2)\, e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: ______________________
2. Nullstellen: ___________________________________
3. Definitionslücken (und Art): ___________________________________
4. $\lim_{x\to\infty} f(x)$: ______________________
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: ______________________
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:



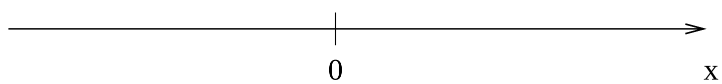


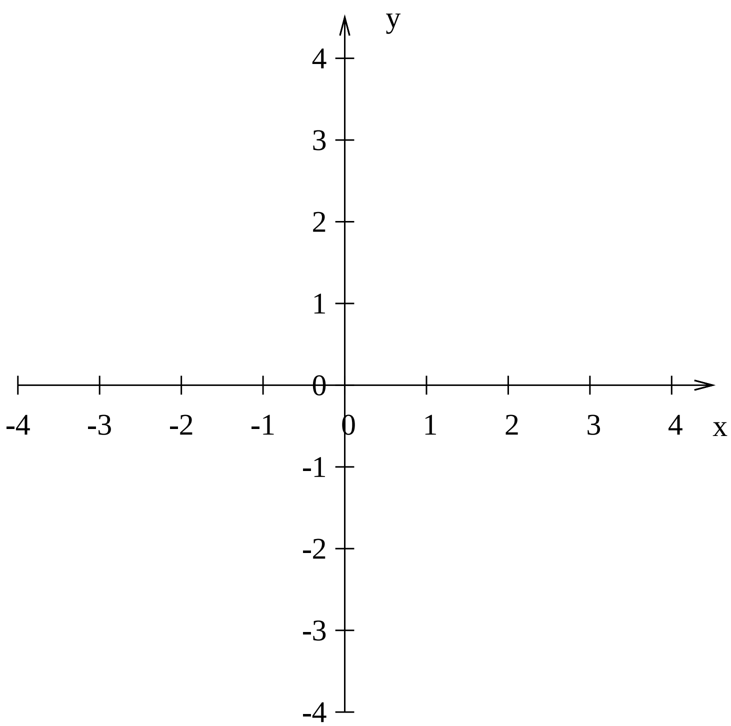
(Lösung siehe Seite 30).

Aufgabe 1.9 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = x^2\, e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: ____________________
2. Nullstellen: ________________________________
3. Definitionslücken (und Art): ________________________________
4. $\lim_{x\to\infty} f(x)$: ____________________
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: ____________________
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:



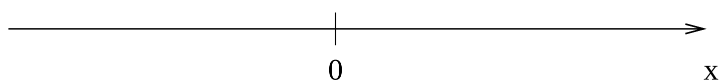


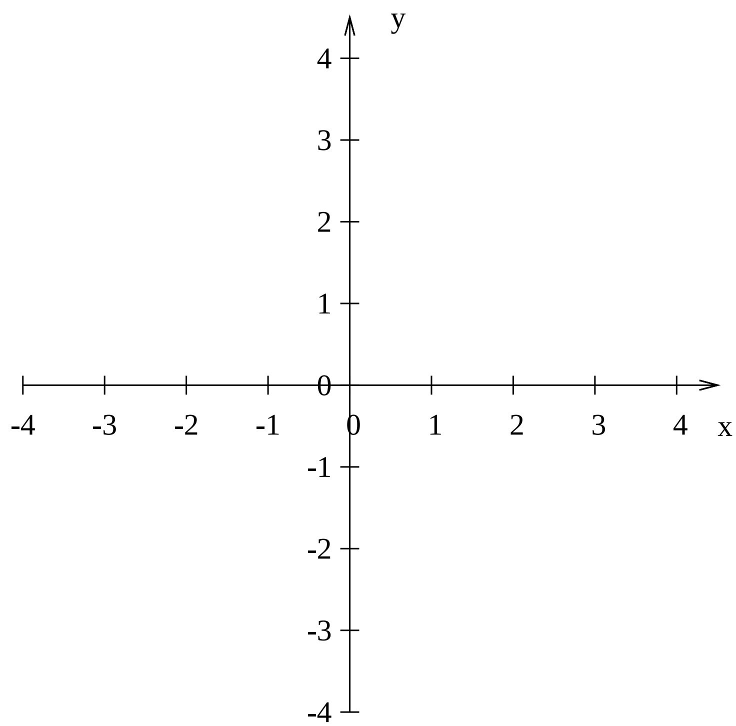
(Lösung siehe Seite 31).

Aufgabe 1.10 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = (x^2 - 1)e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: ____________________________
2. Nullstellen: ____
3. Definitionslücken (und Art): ____
4. $\lim_{x\to\infty} f(x)$: ____________________________
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: ____________________________
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:



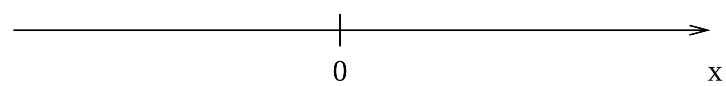


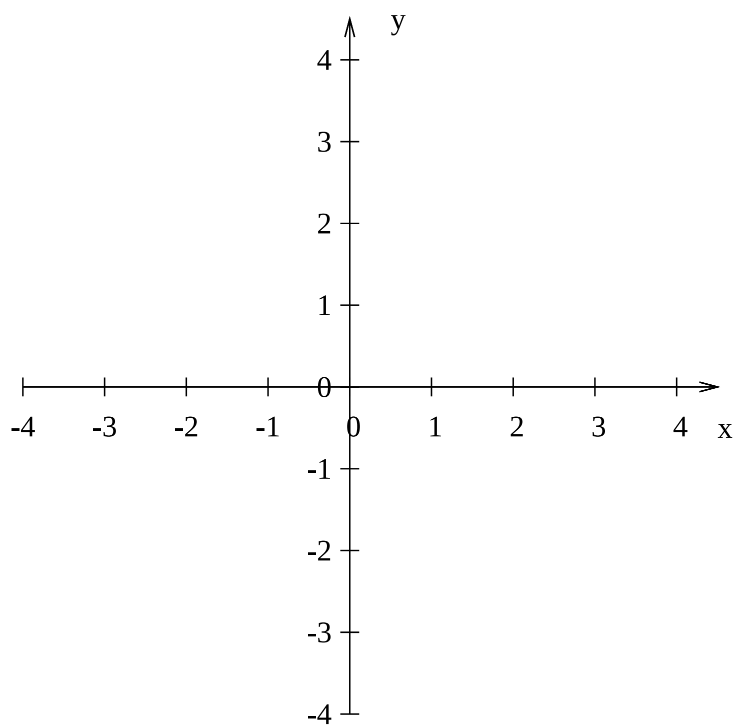
(Lösung siehe Seite 32).

Aufgabe 1.11 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = xe^{-x}$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: ______________________
2. Nullstellen: ____________________________________
3. Definitionslücken (und Art): ____________________________________
4. $\lim_{x\to\infty} f(x)$: ______________________
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: ______________________
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:





(Lösung siehe Seite 33).

1.3 Lösungen zu den einführenden Aufgaben

Zu Aufgabe: 1.1

$f(x)$	$f'(x)$
e^{5x+7}	$5\,e^{5x+7}$
e^{-3x}	$-3\,e^{-3x}$
e^{-2x-3}	$-2\,e^{-2x-3}$
$5 \cdot e^{3x}$	$15\,e^{3x}$
2^x	$\ln(2)\,2^x$

Zu Aufgabe: 1.2

$f(x)$	$f'(x)$
$(x+1)\,e^x$	$e^x\,(x+2)$
$(-2x+5)\,e^x$	$-e^x\ (2x-3)$
$(-3x-4)\,e^{-2x}$	$e^{-2x}\,(6x+5)$
$x\,e^{3x+5}$	$e^{3x+5}\,(3x+1)$
$(-x+2)\,e^{-x}$	$e^{-x}\,(x-3)$
$x^2\,e^{-x}$	$-e^{-x}\,(x-2) = -e^{-x}\,(x^2-2x)$
$(-x^2+x)\,e^{-x}$	$e^{-x}\,(x^2-3x+1)$
$\sqrt{x}\,e^x$	$\frac{e^x\,(2x+1)}{2\sqrt{x}}$
$e^2 \cdot x$	$e^2 \cdot 1,\ \text{da } e^2 \approx 7{,}4$

Zu Aufgabe: 1.3

$f(x)$	$f'(x)$
$e^{(x^2)}$	$2\,x\,e^{(x^2)}$
$\sqrt{x}\,e^x = x^{\frac{1}{2}}\,e^x$	$\frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\,e^x + x^{\frac{1}{2}}\,e^x = \frac{e^x\,(2x+1)}{2\sqrt{x}}$
$e^{(e^x)}$	$e^{(e^x)} \cdot e^x = e^{(x+e^x))}$
$e^{\sqrt{x}}$	$\frac{e^x\,(2x+1)}{2\,\sqrt{x}}$

Zu Aufgabe: 1.4

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{6}{e^x+2}$	$-\frac{6\,e^x}{(e^x+2)^2}$
$\frac{5}{e^{-x}+3}$	$\frac{5\,e^{-x}}{(e^{-x}+3)^2}$
$\frac{e^x+1}{e^x-3}$	$-\frac{4\,e^x}{(e^x-3)^2}$
$\frac{e^x-5}{e^{-x}+7}$	$\frac{7\,e^x-5\,e^{-x}+2}{(e^{-x}+7)^2}$
$\frac{x\,e^x}{e^x+1}=\frac{x}{1+e^{-x}}$	$\frac{e^{-x}+x\,e^{-x}+1}{(e^x+1)^2}$
$\frac{x}{e^x+3}$	$\frac{e^x-x\,e^x+3}{(e^x+3)^2}$
$\frac{x}{e^{-x}+x}$	$\frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x}+x)^2}$

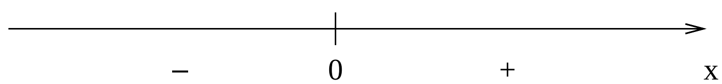
Zu Aufgabe: 1.5

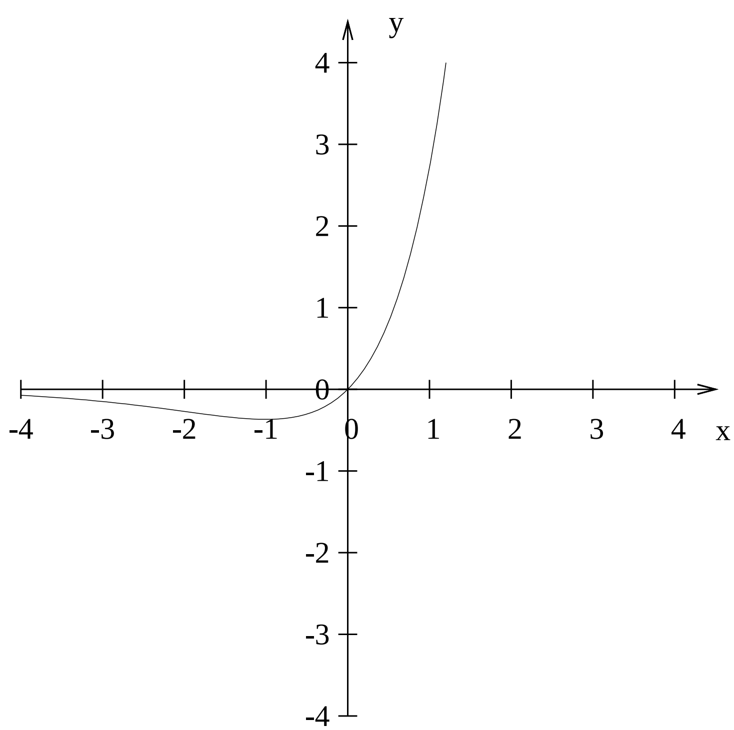
$f(x)$	$Fx)$
e^{2x}	$\frac{1}{2}\,e^{2x}$
e^{4x}	$\frac{1}{4}\,e^{4x}$
e^{-x}	$-e^{-x}$
$6\,e^{3x}$	$2\,e^{3x}$
$4\,e^{2x+3}$	$2\,e^{2x+3}$
$12\,e^{3x+5}$	$4\,e^{3x+5}$
$4\,e^{-2x+3}$	$-2\,e^{-2x+3}$

Zu Aufgabe: 1.6 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = x\,e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$
2. Nullstellen: $x = 0$ (Schnittpunkt)
3. Definitionslücken (und Art): keine
4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Die Exponentialfunktion fällt schneller als jede Potenzfunktion wachsen kann.
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:

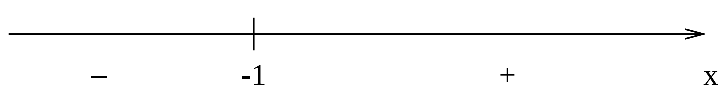


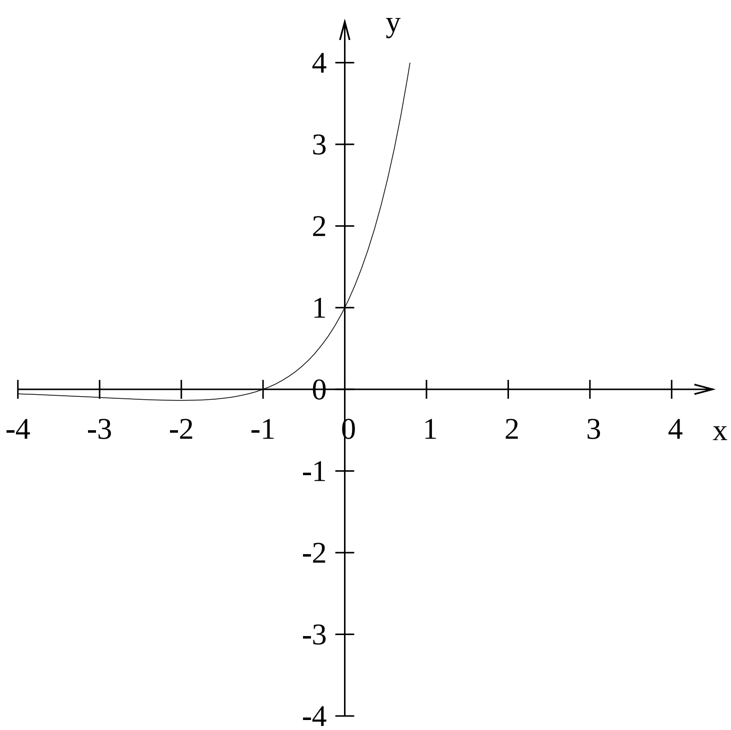


Zu Aufgabe: 1.7 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = (x+1)\,e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1$
2. Nullstellen: $x = -1$ (Schnittpunkt)
3. Definitionslücken (und Art): keine
4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, Die Exponentialfunktion fällt schneller als jede Potenzfunktion wachsen kann.
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:

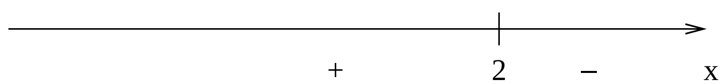


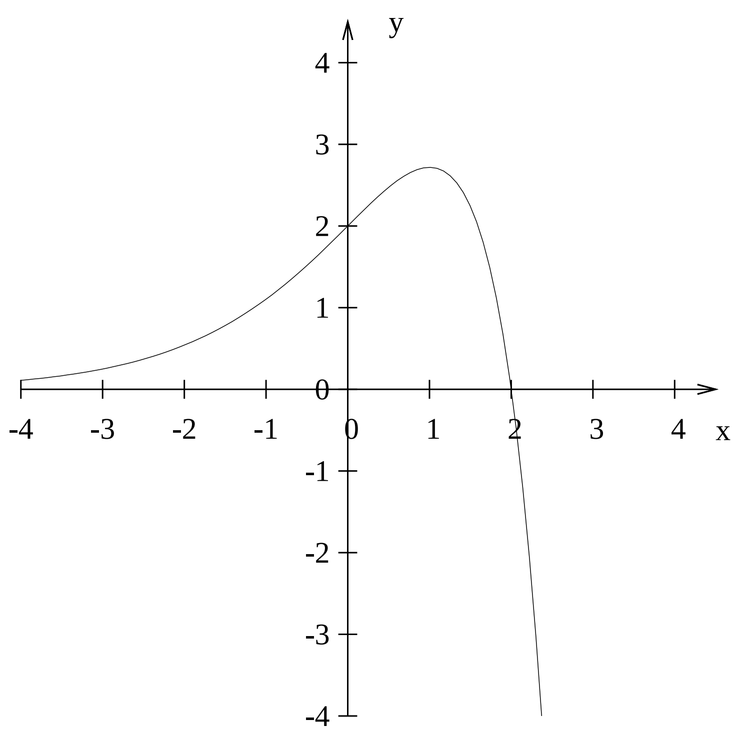


Zu Aufgabe: 1.8 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = (-x + 2)\, e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 2$
2. Nullstellen: $x = 2$ (Schnittpunkt)
3. Definitionslücken (und Art): keine
4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, Die Exponentialfunktion fällt schneller als jede Potenzfunktion wachsen kann.
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:

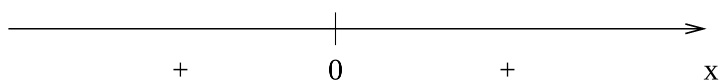


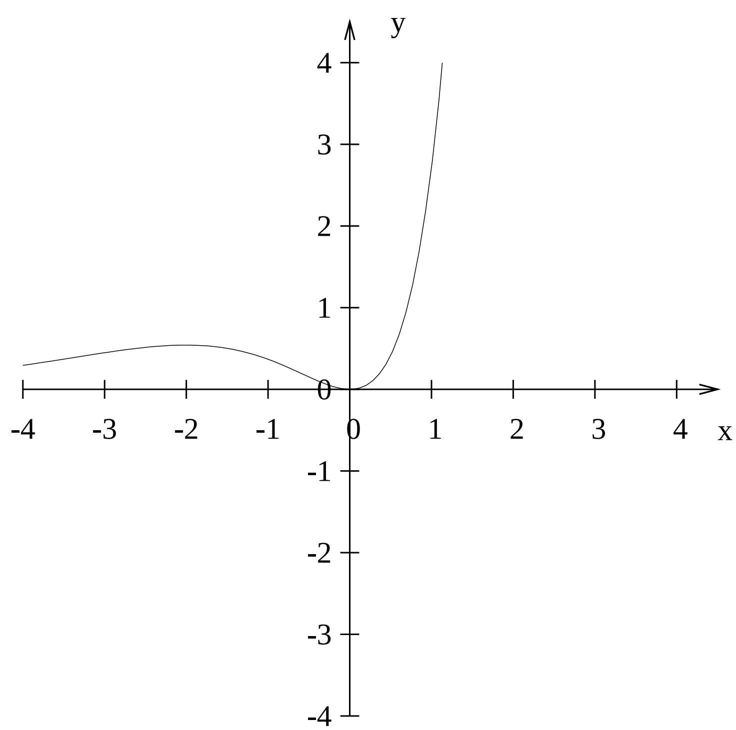


Zu Aufgabe: 1.9 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = x^2\, e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$
2. Nullstellen: $x = -1$ (Berührpunkt, Grad der Nullstelle ist gerade)
3. Definitionslücken (und Art): keine
4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, Die Exponentialfunktion fällt schneller als jede Potenzfunktion wachsen kann.
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:

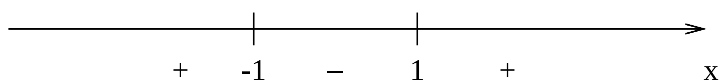


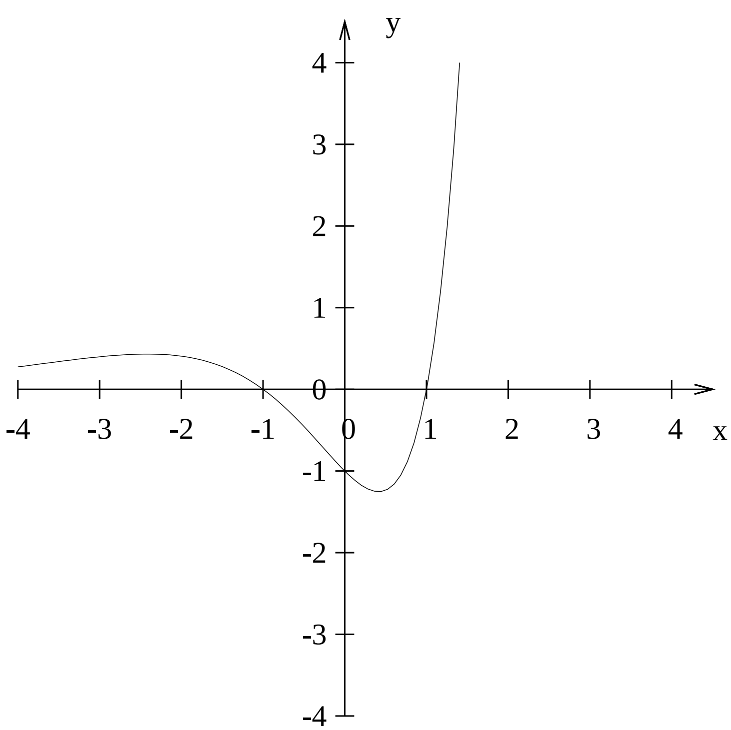


Zu Aufgabe: 1.10 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = (x^2 - 1)e^x$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -1$
2. Nullstellen: $x = -1$ und $x = 1$ (Schnittpunkte, Grade der Nullstellen sind jeweils ungerade)
3. Definitionslücken (und Art): keine
4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, Die Exponentialfunktion fällt schneller als jede Potenzfunktion wachsen kann.
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:

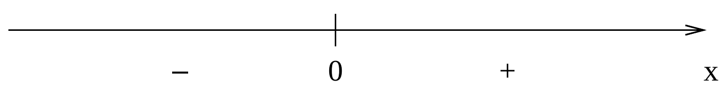


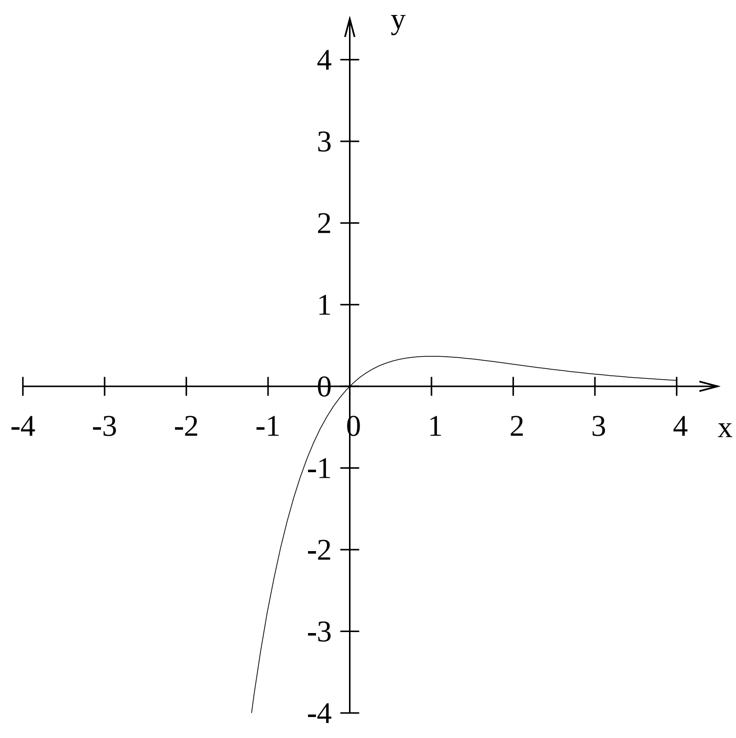


Zu Aufgabe: 1.11 Zu Aufgabe: 1.11 Skizzieren Sie den folgenden Graphen:

$$f(x) = xe^{-x}$$

1. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 0$
2. Nullstellen: $x = 0$ (Schnittpunkt)
3. Definitionslücken (und Art): keine
4. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
5. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
6. Geben Sie mit +/- an, wo der Graph im positiven und negativen Bereich verläuft:





1.4 Funktionen aufstellen

Aufgabe 1.12
Sie haben 100 g eines radioaktiven Stoffes mit der Halbwertszeit von 36 Minuten. Stellen Sie die Zerfallsfunktion mit der e-Funktion auf.
(Lösung siehe Seite 36).

Aufgabe 1.13
Sie haben 50 € und legen dieses Geld mit einem Zinssatz von 2% an. Stellen Sie eine Funktion auf, die die Menge des Geldes im Laufe der Jahre angibt. (Mit der e-Funktion).
(Lösung siehe Seite 37).

Aufgabe 1.14
Sie haben möchten grünen Tee erstellen. Dazu benötigen Sie 80°heißes Wasser. Das Wasser kühlt ab nach folgender Funktion:

$$f(t) = S + ae^{-kt}$$

Die Raumtemperatur beträgt 20°. Zu Beginn war das Wasser kochend. Nach 10 Minuten ist das Wasser nur noch 75° warm. Erstellen Sie eine Funktion, die die Temperatur des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit angibt und geben Sie an, wann das Wasser die Trinktemperatur von 50° erreicht hat.
Die Angaben sind aus einem Teebuch ...
(Lösung siehe Seite 38).

1.5 Funktionen aufstellen – Lösung

Zu Aufgabe: 1.12
Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Sie können direkt eine Zerfallsfunktion aufstellen aus den Daten zur Basis 2:
$$f(t) = 100\,\mathrm{g}\; 2^{-\frac{1}{36\,\mathrm{min}\,t}}$$
Dann formen wir die 2 um zu einer Potenz mit der Basis e:
$$\begin{aligned} 2 &= e^{\ln(2)} \\ 2^{-\frac{1}{36\,\mathrm{min}\,t}} &= \left(e^{\ln(2)}\right)^{-\frac{1}{36\,\mathrm{min}\,t}} \\ &= e^{-\ln(2)\frac{1}{36\,\mathrm{min}\,t}} \\ &= e^{-\frac{\ln(2)}{36\,\mathrm{min}\,t}} \\ f(x) &= 100\,\mathrm{g}\; e^{-\frac{\ln(2)}{36\,\mathrm{min}}\,t} \end{aligned}$$

2. Wir verfolgen folgenden Ansatz:
$$f(x) = a \cdot e^{bt}$$
Jetzt müssen aus den gegebenen Werten a und b bestimmt werden. Da zwei Variablen bestimmt werden sollen, sind zwei Gleichungen notwendig:
$$\begin{aligned} f(0) &= 100\,\mathrm{g} \\ f(36\,\mathrm{min}) &= 50\,\mathrm{g} \end{aligned}$$
Eingesetzt ergibt dies:
$$\begin{aligned} a &= 100\,\mathrm{g} && \text{mit } e^0 = 1 \\ 100\,\mathrm{g} \cdot e^{b\cdot 36\,\mathrm{min}} &= 50\,\mathrm{g} \end{aligned}$$
Die letzte Gleichung wird nun umgeformt und nach b aufgelöst:
$$\begin{aligned} 100\,\mathrm{g} \cdot e^{b\cdot 36\,\mathrm{min}} &= 50\,\mathrm{g} \\ e^{b\cdot 36\,\mathrm{min}} &= \frac{1}{2} \\ b \cdot 36\,\mathrm{min} &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ b \cdot 36\,\mathrm{min} &= \ln\left(2^{-1}\right) \\ b \cdot 36\,\mathrm{min} &= -\ln(2) \\ b &= -\frac{\ln(2)}{36\,\mathrm{min}} \\ f(x) &= 100\,\mathrm{g}\; e^{-\frac{\ln(2)}{36\,\mathrm{min}}\,t} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 1.13
Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Sie können direkt eine Geldmengenfunktion aufstellen aus den Daten zur Basis 1,02, a steht für anno = Jahr:

$$f(t) = 50\ 1{,}02^{\frac{1}{\mathrm{a}\, t}}$$

Dann formen wir die 1,02 um zu einer Potenz mit der Basis e:

$$\begin{aligned} 1{,}02 &= e^{\ln(1{,}02)} \\ 1{,}02^{\frac{1}{\mathrm{a}\,t}} &= \left(e^{\ln(1{,}02)}\right)^{\frac{1}{\mathrm{a}\,t}} \\ &= e^{\frac{\ln(1{,}02)}{\mathrm{a}\,t}} \\ f(x) &= 50\ e^{-\frac{\ln(1{,}02)}{\mathrm{a}}\,t} \end{aligned}$$

2. Wir verfolgen folgenden Ansatz:

$$f(x) = a \cdot e^{bt}$$

Jetzt müssen aus den gegebenen Werten a und b bestimmt werden. Da zwei Variablen bestimmt werden sollen, sind zwei Gleichungen notwendig:

$$\begin{aligned} f(0) &= 50 \\ f(1\,\mathrm{a}) &= 51 \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$\begin{aligned} a &= 50 && \text{mit } e^0 = 1 \\ 50\ \cdot e^{b\cdot 1\,\mathrm{a}} &= 51 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird nun umgeformt und nach b aufgelöst:

$$\begin{aligned} 50\ \cdot e^{b\cdot 1\,\mathrm{a}} &= 51 \\ e^{b\cdot 1\,\mathrm{a}} &= 1{,}02 \\ b\,\mathrm{a} &= \ln(1{,}02) \\ b &= \ln(1{,}02)\,\frac{1}{\mathrm{a}} \end{aligned}$$

$$f(x) = 50\,\mathrm{a}\,e^{-\frac{\ln(1{,}02)}{\mathrm{a}}\,t}$$

Zu Aufgabe: 1.14
Die Raumtemperatur ist natürlich die Temperatur, die der Tee auf lange Sicht annimmt: $S = 20°$. Es ergeben sich also folgende Gleichungen:

Das Wasser ist zu Beginn ($t = 0$) 100° heiß, nach 10 Minuten nur noch 75°.

$$\begin{aligned} 20 + a \cdot e^{-k \cdot 0} &= 100 \\ 20 + a \cdot e^{-k \cdot 10} &= 75 \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen müssen a und k bestimmt werden. Dazu untersuchen wir die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} 20 + a \cdot e^{-k \cdot 0} &= 100 \\ 20 + a \cdot e^{0} &= 100 \\ 20 + a &= 100 \\ a &= 80 \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir das k in der 2. Gleichung:

$$\begin{aligned} 20 + 80 \cdot e^{-k \cdot 10} &= 75 \\ 80 \cdot e^{-k \cdot 10} &= 55 \\ e^{-k \cdot 10} &= \frac{55}{80} \\ -k \cdot 10 &= \ln\left(\frac{55}{80}\right) \\ k &= \frac{-1}{10} \cdot \ln\left(\frac{55}{80}\right) \\ k &= 0{,}037 \end{aligned}$$

$$f(t) = 20 + 80 \cdot e^{-0{,}037} \cdot t$$

Wann ist die Temperatur von 50° erreicht?

$$\begin{aligned} 20 + 80 \cdot e^{-0{,}037 \cdot t} &= 50 \\ 80 \cdot e^{-0{,}037 \cdot t} &= 30 \\ e^{-0{,}037 \cdot t} &= \frac{3}{8} \\ -0{,}037 \cdot t &= \ln\left(\frac{3}{8}\right) \\ t &= \frac{-1}{0{,}037} \cdot \ln\left(\frac{3}{8}\right) \\ t &= 26{,}5 \end{aligned}$$

Tja, nach den Angaben aus dem Teebuch müsste man also ca. 26 Minuten warten bis man den Tee trinken darf.

1.6 Kurvendiskussion

Man kann Mathematik benutzen um Probleme darzustellen und dann zu analysieren. Wenn Sie als Modell eine Kurve (Funktion) erhalten, dann wollen Sie die Funktion vollständig beschreiben können. Vergleichen Sie auch mit dem Kapitel Kurvendiskussion aus der H1.

Hier werden jetzt nur für die e-Funktion spezielle Punkte angesprochen.

1. Symmetrie:

   (a) Beispiel für eine achsensymmetrische Funktion:

   $$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} + e^{x} \\ f(-x) &= e^{-(-x)} + e^{-x} \\ &= e^{x} + e^{-x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Da $f(-x) = f(x)$ gilt, ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.

   (b) Beispiel für eine punktsymmetrische Funktion:

   $$\begin{aligned} f(x) &= x\, e^{(x^2)} \\ f(-x) &= (-x)\, e^{(-x)^2} \\ &= -x\, e^{(x)^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

   Da: $f(-x) = -f(x)$ gilt, ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

   (c) Beispiel für eine Funktion, welche weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse ist:

   $$\begin{aligned} f(x) &= x\, e^{x} \\ f(-x) &= (-x)\, e^{(-x)} \\ &= -x\, e^{-x} \\ &= -x\, \frac{1}{e^{xa}} \\ &\neq -f(x) \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

   Da weder: $f(-x) = -f(x)$ noch $f(-x) = f(x)$ gilt, ist die Funktion weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse.

1.7 Kurvendiskussionen – Drill

Untersuchen Sie die Funktionen nach folgenden Gesichtspunkten:

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich.
   Untersuchen Sie eventl. Definitionslücken.

2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

3. Bestimmen Sie, ob und welche Symmetrie vorliegt.

4. Bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen.

5. Bestimmen Sie die Ableitungen und die Stammfunktion.

6. Bestimmen Sie die Extrempunkte.

7. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten des Graphen.

8. Bestimmen Sie die Wendepunkte.

9. Skizzieren Sie den Graphen anhand Ihrer Ergebnisse.
   Skizzieren Sie bitte erst auf dem Papier bevor Sie kontrollieren.

Aufgabe 1.15

$$f(x) = e^x(x+1)$$

(Lösung siehe Seite 42).

Aufgabe 1.16

$$f(x) = e^{-x}(x+1)$$

(Lösung siehe Seite 46).

Aufgabe 1.17

$$f(x) = e^{2x+3}(x-1)$$

(Lösung siehe Seite 51).

Aufgabe 1.18

$$f(x) = e^x(1-x)$$

(Lösung siehe Seite 56).

Aufgabe 1.19

$$f(x) = e^{-x}(1-2x)$$

(Lösung siehe Seite 61).

Aufgabe 1.20

$$f(x) = e^{-2x+3}(1-x)$$

(Lösung siehe Seite 66).

Aufgabe 1.21

Die Kettenlinie. Das ist eine Linie, die ein Seil hat, wenn es durchhängt.

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

(Lösung siehe Seite 71).

1.8 Lösungen zu den Aufgaben

Zu Aufgabe: 1.15

$$f(x) = e^x(x+1)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}$$

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = e^0(0+1) = 1 \cdot (1) = 1$$

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ e^x(x+1) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x+1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|1)$.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: $(-1|0)$.

3. **Symmetrie**

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-x}(-x+1) \\ &= e^{-x}(1-x) \\ &\neq \quad f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

   Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x\to\infty} e^x(x+1) = \infty$$

   Denn e^x wird immer größer und $x+1$ wird ebenfalls immer größer für größer werdende x-Werte.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x(x+1) = 0$$

   e^x geht schneller gegen null als jede Potenzfunktion.

5. **Ableitungen**

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x(x+1) \\ f'(x) &= e^x(x+1) + e^x \\ &= e^x(x+2) \\ f''(x) &= e^x(x+2) + e^x \\ &= e^x(x+3) \\ f'''(x) &= e^x(x+3) + e^x \\ &= e^x(x+4) \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion kann man entweder mit Hilfe der partiellen Integration oder durch Erraten erhalten:

(a) Erraten:
Von f nach f' und dann zu f'' wird der Summand in der Klammer einfach nur hochgezählt. Die Vermutung liegt nahe, dass Sie bei der Stammfunktion die Klammer um eins vermindern müssen. Wir probieren $g(x)$ als eine mögliche Stammfunktion aus.

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x(x+1-1) \\ g(x) &= x\,e^x \\ g'(x) &= e^x + x\,e^x \\ &= e^x(x+1) \end{aligned}$$

Tatsächlich ist $g(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$:

$$F(x) = xe^x$$

(b) Die partielle Integration:

$$u(x) = x+1, \qquad v'(x) = e^x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x+1 & v(x) = e^x \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int (x+1)\cdot e^x\,dx &= (x+1)\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx \\ &= (x+1)e^x - e^x \\ &= xe^x \end{aligned}$$

6. **Extremstellen**

   (a) **notwendige Bedingung**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ e^x(x+2) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

$$f''(-2) = e^{-2}((-2)+3) = e^{-2} > 0, \text{ da } e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

   Extremstelle:

$$f(-2) = e^{-2}((-2)+1) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2} \approx -0{,}135$$

   Der Graph von f hat einen Tiefpunkt bei $(-2|-0{,}135)$.

7. **Monotonieverhalten**

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x+2) \\ f'(x) &< 0, \quad x < -2 \\ f'(x) &> 0, \quad x > -2 \end{aligned}$$

   Die Funktion ist im Intervall $(-\infty; -2)$ streng monoton fallend und im Intervall $(-2; \infty)$ ist sie streng monoton steigend.

8. **Wendestellen**

   (a) **notwendige Bedingung**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ e^x(x+3) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$

$$f''(-3) = 0 \text{ und } f'''(-3) = e^{-3}((-3)+4) = e^{-3} > 0, \text{ da } e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

   Wendepunkt

$$f(-3) = e^{-3}((-3)+1) = -2e^{-3} = -\frac{2}{e^3} \approx -0{,}0996$$

   Der Graph von f hat einen Wendepunkt bei $(-3|-0{,}1)$.

9. **Bild**

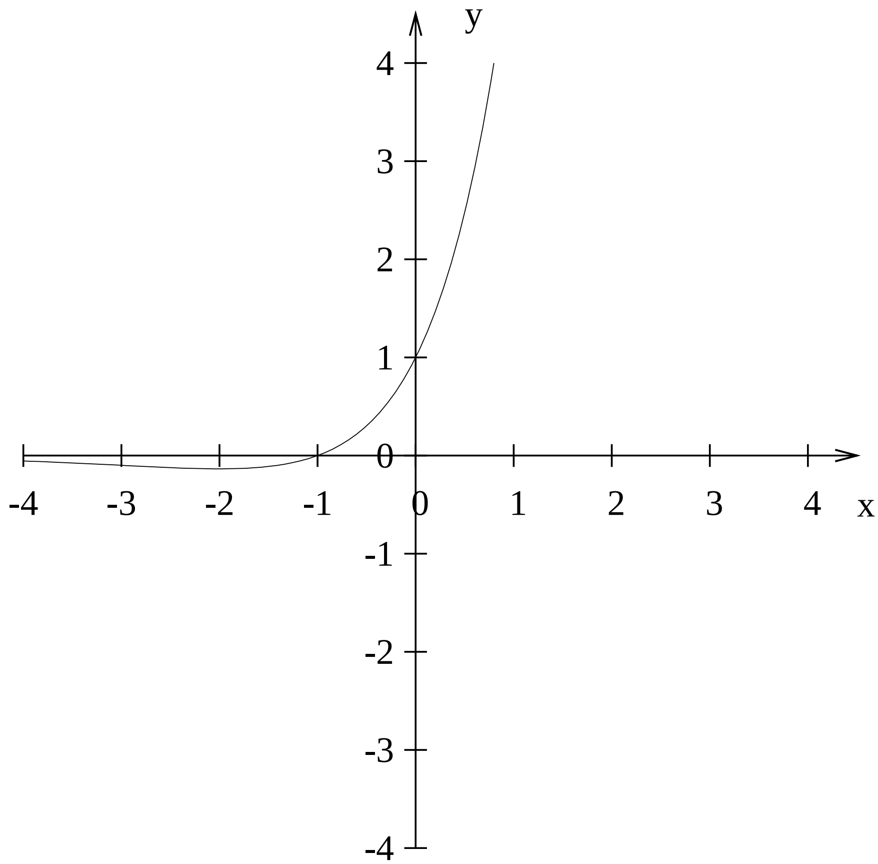


Abbildung 1.3: $f(x) = e^x(x + 1)$

Zu Aufgabe: 1.16

$$f(x) = e^{-x}(x+1)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}$$

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = e^0(0+1) = 1 \cdot (1) = 1$$

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ e^{-x}(x+1) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x+1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|1)$.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: $(-1|0)$.

3. **Symmetrie**

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^x(-x+1) \\ &= e^x(1-x) \\ &\neq \quad f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

   Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(x+1) = 0$$

   Denn e^{-x} nähert sich der null und die Funktion strebt schneller gegen null als jede Potenzfunktion.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x+1) = -\infty$$

   e^{-x} wird für negative Werte immer größer, strebt also gegen $+\infty$.
   $x+1$ dagegen ist negativ für große negative Werte und strebt gegen $-\infty$.

5. **Ableitungen**

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}(x+1) \\ f'(x) &= -e^{-x}(x+1) + e^{-x} \\ &= e^{-x}(-x-1) + e^{-x} \\ &= e^{-x}(-x) \\ f''(x) &= -e^{-x}(-x) - e^{-x} \\ &= e^{-x}(x-1) \\ f'''(x) &= -e^{-x}(x-1) + e^{-x} \\ &= e^{-x}(-x+1) + e^{-x} \\ &= e^{-x}(-x+2) \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion kann man entweder mit Hilfe der partiellen Integration oder durch Erraten erhalten:

(a) Erraten:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}(x+1) \\ f'(x) &= -e^{-x}(x) \\ f''(x) &= e^{-x}(x-1) \\ f'''(x) &= -e^{-x}(x-2) \end{aligned}$$

Bei der Ableitung wechselt das Vorzeichen. In der Klammer wird die Zahl heruntergezählt. Dann kann man vermuten, dass eine Stammfunktion so lautet:

$$F(x) = -e^{-x}(x+2) = e^{-x}(-x-2)$$

Die Probe!!! (die Ableitung der Stammfunktion) ergibt $f(x)$.

(b) Die partielle Integration:

$$u(x) = x+1, \qquad v'(x) = e^{-x}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x+1 & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int (x+1)\cdot e^{-x}\,dx &= (x+1)\cdot(-1)e^{-x} - \int 1\cdot -e^{-x}\,dx\\ &= (-x-1)\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\\ &= (-x-1)e^{-x} - e^{-x}\\ &= (-x-2)e^{-x}\\ &= -(x+2)e^{-x}\end{aligned}$$

6. **Extremstellen**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -e^{-x}(x+1) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

   Bei $x = -1$ ist eine mögliche Extremstelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

   $f'(-1) = 0$ und $f''(-1) = e^1((-1)-1) = (-2)e^{-2} < 0,$ da $e^x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$

   Extremstelle:

   $$f(-1) = e^1((-1)+1) = 0 \cdot e^1 = 0$$

   Der Graph von f hat einen Hochpunkt bei $(-1|0)$.

7. **Monotonieverhalten**

   $$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(x+1) \\ f'(x) &> 0, \quad x < -1 \\ f'(x) &< 0, \quad x > -1 \end{aligned}$$

   Die Funktion ist im Intervall $(-\infty; -1)$ streng monoton steigend und im Intervall $(-1; \infty)$ ist sie streng monoton fallend.

8. **Wendestellen**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f''(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ e^{-x}(x-1) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   Bei $x = 1$ ist eine mögliche Extremstelle.

(b) **hinreichende Bedingung:** $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$

$$f''(1) = 0 \text{ und } f'''(1) = -e^{-1}(1-2) = e^{-1} > 0, \text{ da } e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Wendepunkt

$$f(1) = e^{-1}(1+1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \approx 0{,}736$$

Der Graph von f hat einen Wendepunkt bei $(1|0{,}736)$.

9. **Bild**

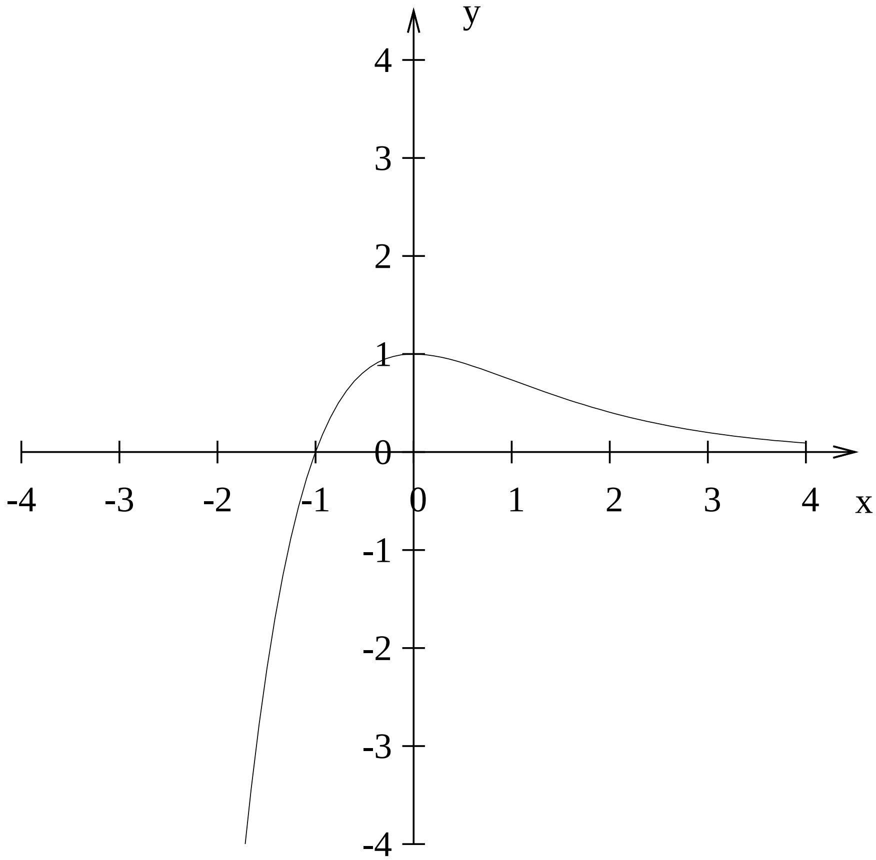


Abbildung 1.4: $e^{-x}(x+1)$

Zu Aufgabe: 1.17

$$f(x) = e^{2x+3}(x-1)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}$$

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = e^3(0-1) = -e^3 \approx -20{,}0855$$

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ e^{2x+3}(x-1) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x-1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|-20)$.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: $(1|0)$.

3. **Symmetrie**

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-2x+3}(-x-1) \\ &\neq \quad f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

   Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x\to\infty} e^{2x+3}(x-1) = +\infty$$

   Für große Werte wird die Exponentialfunktion groß und $x-1$ ebenfalls.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x+3}(x-1) = 0$$

   Für kleine x-Werte (große negative Zahlen) strebt die Exponentialfunktion gegen null und zwar schneller als jede Potenzfunktion. $x-1$ ist negativ dann, also strebt die Funktion von unten gegen die x-Achse.

5. **Ableitungen**

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{2x+3}(x-1) \\
f'(x) &= 2e^{2x+3}(x-1) + e^{2x+3} \\
&= e^{2x+3}(2x-2) + e^{2x+3} \\
&= e^{2x+3}(2x-1) \\
f''(x) &= 2e^{2x+3}(2x-1) + e^{2x+3} \cdot 2 \\
&= e^{2x+3}(4x-2) + 2e^{2x+3} \\
&= 4xe^{2x+3} \\
f'''(x) &= 4e^{2x+3} + 8xe^{2x+3} \\
&= 4e^{2x+3}(1+2x) \\
&= 4e^{2x+3}(2x+1)
\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion kann man entweder mit Hilfe der partiellen Integration oder durch Erraten erhalten:

(a) Erraten:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{2x+3}(x-1) \\
f'(x) &= e^{2x+3}(2x-1) \\
f''(x) &= e^{2x+3}(4x+0) \\
f'''(x) &= e^{2x+3}(8x+4)
\end{aligned}$$

Ein Faktor bleibt e^{2x+3}. In der Klammer wird der Vorfaktor vor dem x immer verdoppelt. Was mit der Zahl passiert ist nicht erkennbar. Also setzen wir für die Zahl a ein, leiten ab und bestimmen a so, dass $f(x)$ herauskommt.

$$\begin{aligned}
G(x) &= e^{2x+3}(0{,}5x+a) \\
g(x) &= 2e^{2x+3}(0{,}5x+a) + e^{2x+3} \cdot 0{,}5 \\
g(x) &= e^{2x+3}(x+2a+0{,}5) \\
2a+0{,}5 &= -1 \\
2a &= -1{,}5 \\
a &= -0{,}75
\end{aligned}$$

$$F(x) = e^{2x+3}(0{,}5x-0{,}75)$$

Die Probe!!! (die Ableitung von $F(x)$) ergibt $f(x)$.

(b) Die partielle Integration:

$$u(x) = x - 1, \qquad v'(x) = e^{2x+3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x - 1 & v(x) = 0{,}5e^{2x+3} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{2x+3} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int (x-1) \cdot e^{2x+3}\,dx &= (x-1) \cdot 0{,}5e^{2x+3} - \int 1 \cdot 0{,}5e^{2x+3}\,dx \\ &= (x-1) \cdot 0{,}5e^{2x+3} - 0{,}25e^{2x+3} \\ &= (0{,}5x - 0{,}5)e^{2x+3} - 0{,}25e^{2x+3} \\ &= e^{2x+3}(0{,}5x - 0{,}75) \end{aligned}$$

6. **Extremstellen**

(a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ e^{2x+3}(2x-1) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ 2x - 1 &= 0 \\ x &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Bei $x = 0{,}5$ ist eine mögliche Extremstelle.

(b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

$$f'(0{,}5) = 0 \text{ und } f''(0{,}5) = e^{1+3}(2) = 2e^4 > 0, \text{ da } e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Extremstelle:

$$f(0{,}5) = e^4(-0{,}5) \approx -27{,}299$$

Der Graph von f hat einen Tiefpunkt bei $(0{,}5| - 27)$.

7. **Monotonieverhalten**

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x+3}(2x-1) \\ f'(x) &< 0, \quad x < 0{,}5 \\ f'(x) &> 0, \quad x < 0{,}5 \end{aligned}$$

Die Funktion ist im Intervall $(-\infty; -0{,}5)$ streng monoton fallend und im Intervall $(-0{,}5; \infty)$ ist sie streng monoton steigend.

8. **Wendestellen**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f''(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
4xe^{2x+3} &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

   Bei $x = 0$ ist eine mögliche Wendestelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$

$$f''(0) = 0 \text{ und } f'''(0) = e^3(4) > 0, \text{ da } e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

   Wendepunkt

$$f(0) = e^3(-1) \approx -20{,}0855$$

   Der Graph von f hat einen Wendepunkt bei $(0|-20)$.

9. **Bild**

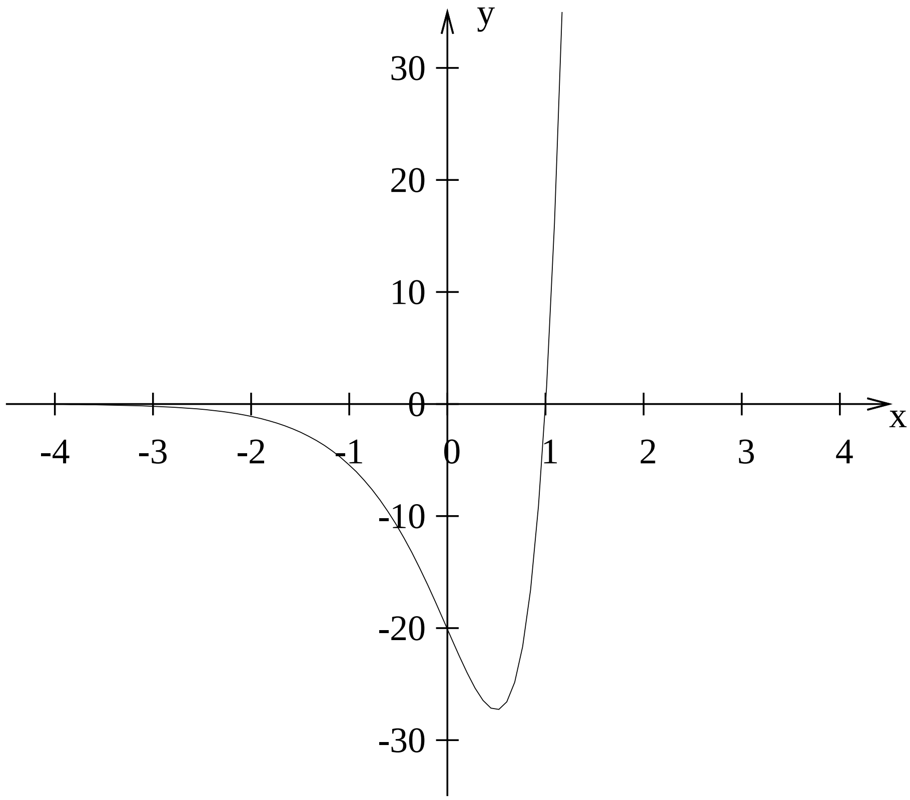


Abbildung 1.5: $f(x) = e^{2x+3}(x-1)$

Zu Aufgabe: 1.18

$$f(x) = e^x(1-x)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}$$

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = e^0(1-0) = 1 \cdot (1) = 1$$

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ e^x(1-x) &= 0 e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ 1-x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: (0|1).

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: (1|0).

3. **Symmetrie**

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-x}(1+x) \\ &\neq \quad f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

   Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x\to\infty} e^x(1-x) = -\infty$$

   Denn e^x wird immer größer und zwar schneller als jede Potenzfunktion. $1-x$ wird immer kleiner (immer größere negative Werte – negativ) für größer werdende x-Werte .

$$\lim_{x\to-\infty} e^x(1-x) = 0$$

   e^x geht schneller gegen null als jede Potenzfunktion. $1-x$ ist positiv für negative x-Werte.

5. **Ableitungen**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x(1-x)\\
f'(x) &= e^x(1-x) + e^x(-1)\\
&= e^x \cdot (-x)\\
&= -xe^x\\
f''(x) &= e^x(-x) + e^x(-1)\\
&= e^x(-1-x)\\
&= -e^x(1+x)\\
f'''(x) &= e^x(-1-x) + e^x(-1)\\
&= e^x(-2-x)\\
&= -e^x(2+x)
\end{aligned}
$$

Eine Stammfunktion kann man entweder mit Hilfe der partiellen Integration oder durch Erraten erhalten:

(a) Erraten:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x(1-x)\\
f'(x) &= e^x(0-x)\\
f''(x) &= e^x(-1-x)\\
f'''(x) &= e^x(-2-x)
\end{aligned}
$$

Eigentlich bleiben die Terme alle gleich, nur die Zahl wird heruntergezählt.
Die Vermutung liegt nahe, dass man das dann zur Stammfunktion dann nur hochzählen muss:

$$F(x) = e^x(2-x)$$

Die Probe!!! gibt einem recht.

(b) Die partielle Integration:

$$u(x) = 1-x, \qquad v'(x) = e^x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = 1-x & v(x) = e^x \\ u'(x) = -1 & v'(x) = e^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int (1-x)\cdot e^x\,dx &= (1-x)\cdot e^x - \int -1\cdot e^x\,dx\\ &= (1-x)\cdot e^x + \int e^x\,dx\\ &= (1-x)e^x + e^x\\ &= xe^x(2-x)\end{aligned}$$

6. **Extremstellen**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -xe^x &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

   Bei $x = 0$ ist eine mögliche Extremstelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

   $$f'(0) = 0 \text{ und } f''(0) = -e^0(1+0) = -1 < 0$$

   Extremstelle:
   $$f(0) = e^0(1-0) = 1\cdot(1) = 1$$
   Der Graph von f hat einen Hochpunkt bei $(0|1)$.

7. **Monotonieverhalten**

   $$\begin{aligned} f'(x) &= -xe^x \\ f'(x) &> 0, \quad x < 0 \\ f'(x) &< 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

   Die Funktion ist im Intervall $(-\infty; 0)$ streng monoton steigend und im Intervall $(0; \infty)$ ist sie streng monoton fallend.

8. **Wendestellen**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f''(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -e^x(1+x) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

   Bei $x = -1$ ist eine mögliche Wendestelle.

(b) **hinreichende Bedingung:** $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$

$$f''(-1) = 0 \text{ und } f'''(-1) = -e^{-1}(2+(-1)) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} > 0, \text{ da } e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Wendepunkt

$$f(-1) = e^{-1}(1-(-1)) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \approx 0{,}7358$$

Der Graph von f hat einen Wendepunkt bei $(-1|0{,}7)$.

9. **Bild**

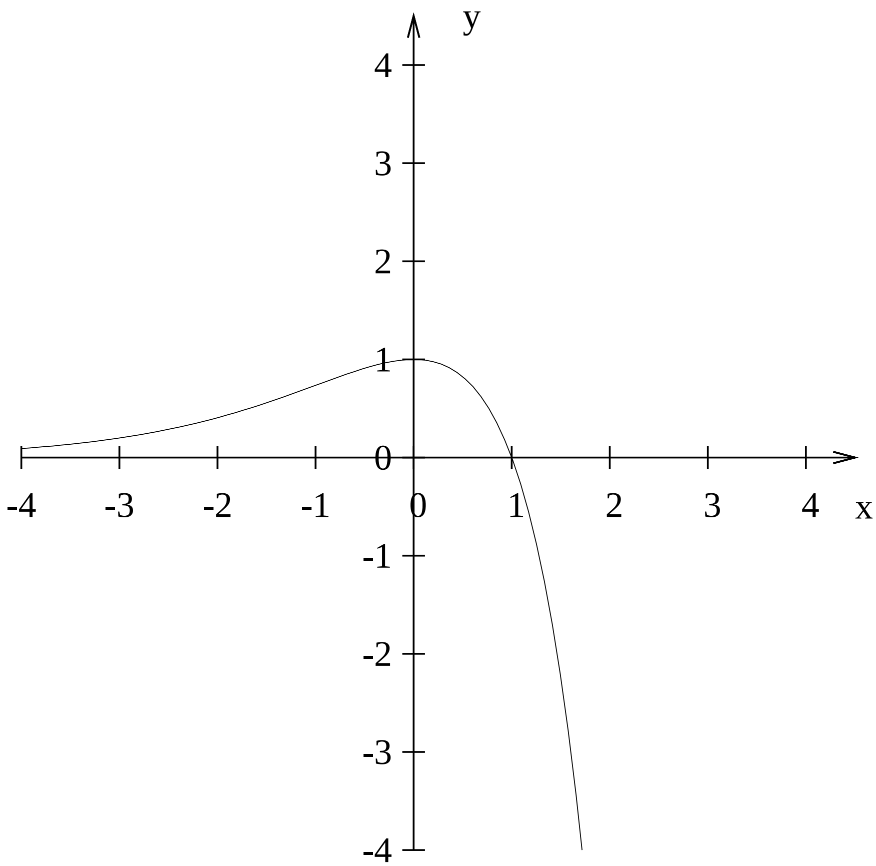


Abbildung 1.6: $f(x) = e^x(1 - x)$

Zu Aufgabe: 1.19

$$f(x) = e^{-x}(1-2x)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}$$

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = e^0(1-0) = 1 \cdot (1) = 1$$

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ e^{-x}(1-2x) &= 0 e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ 1-2x &= 0 \\ x &= 0{,}5 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|1)$.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: $(-0{,}5|0)$.

3. **Symmetrie**

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^x(1-2(-x)) \\ &= e^x(1+2x) \\ &\neq \quad f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

   Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(1-2x) = 0$$

   Denn e^{-x} nähert sich der null und die Funktion strebt schneller gegen null als jede Potenzfunktion. $1-2x$ ist dann negativ, also nähert sich der Graph von unten der x-Achse.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(1-2x) = +\infty$$

   e^{-x} wird für negative Werte immer größer, strebt also gegen $+\infty$.
   $1-2x$ dagegen ist dann positiv, weil Sie in x negative Werte einsetzen.

5. **Ableitungen**

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x}(1-2x)\\
f'(x) &= -e^{-x}(1-2x) + e^{-x}(-2)\\
&= e^{-x}(-1+2x) + e^{-x}(-2)\\
&= e^{-x}(-3+2x)\\
&= e^{-x}(2x-3)\\
f''(x) &= -e^{-x}(2x-3) + e^{-x}\cdot(2)\\
&= e^{-x}(-2x+3) + e^{-x}\cdot(2)\\
&= e^{-x}(-2x+5)\\
f'''(x) &= -e^{-x}(-2x+5) + e^{-x}(-2)\\
&= e^{-x}(2x-5) + e^{-x}(-2)\\
&= e^{-x}(2x-7)
\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion kann man entweder mit Hilfe der partiellen Integration oder durch Erraten erhalten:

(a) Erraten:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -e^{-x}(2x-1)\\
f'(x) &= e^{-x}(2x-3)\\
f''(x) &= -e^{-x}(2x-5)\\
f'''(x) &= e^{-x}(2x-7)
\end{aligned}$$

Bei der Ableitung wechselt das Vorzeichen vor dem e. In der Klammer wird die Zahl immer um zwei vermindert. Dann kann man vermuten, dass die Stammfunktion so lautet:

$$F(x) = e^{-x}(2x+1)$$

Die Probe!!! (die Ableitung $F(x)$) ergibt $f(x)$.

(b) Die partielle Integration:

$$u(x) = 1-2x, \qquad v'(x) = e^{-x}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = 1-2x & v(x) = -e^{-x}\\ u'(x) = -2 & v'(x) = e^{-x} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int (1-2x)\cdot e^{-x}\,dx &= (1-2x)\cdot(-1)e^{-x} - \int(-2)\cdot -e^{-x}\,dx\\ &= (2x-1)\cdot e^{-x} - \int 2e^{-x}\,dx\\ &= (2x-1)e^{-x} + 2e^{-x}\\ &= (2x+1)e^{-x}\end{aligned}$$

6. **Extremstellen**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ e^{-x}(2x-3) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$$

   bei $x = 1{,}5$ ist also eine mögliche Extremstelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

   $f'(1{,}5) = 0$ und $f''(1{,}5) = -e^{1{,}5}(3{-}5) = 2e^{1{,}5} > 0,$ da $e^x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$

   Extremstelle:

   $$f(1{,}5) = -e^{1{,}5}(3-1) = -2e^{1{,}5} \approx 0{,}446$$

   Der Graph von f hat einen Tiefpunkt bei $(1{,}5|0{,}4)$.

7. **Monotonieverhalten**

   $$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}(2x-3) \\ f'(x) &< 0, \quad x < 1{,}5 \\ f'(x) &> 0, \quad x > 1{,}5 \end{aligned}$$

   Die Funktion ist im Intervall $(-\infty; 1{,}5)$ streng monoton fallend und im Intervall $(1{,}5; \infty)$ ist sie streng monoton steigend.

8. **Wendestellen**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f''(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -e^{-x}(2x-5) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x &= 2{,}5 \end{aligned}$$

   Bei $x = 2{,}5$ ist eine mögliche Wendestelle.

(b) **hinreichende Bedingung:** $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$

$f''(2{,}5) = 0$ und $f'''(2{,}5) = e^{2{,}5}(5-7) = (-2)e^{2{,}5} < 0,$ da $e^x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$

Wendepunkt

$$f(2{,}5) = -e^{2{,}5}(5-1) = (-4)e^{2{,}5} \approx -0{,}328$$

Der Graph von f hat einen Wendepunkt bei $(2{,}5|-0{,}3)$.

9. **Bild**

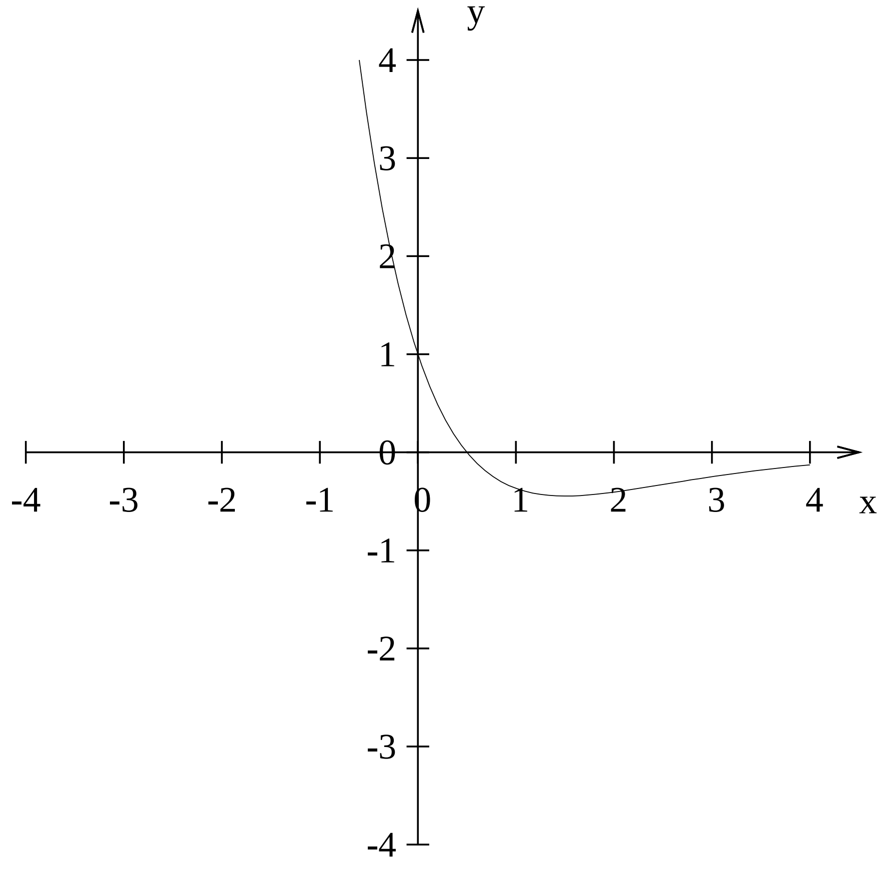


Abbildung 1.7: $f(x) = e^{-x}(1 - 2x)$

Zu Aufgabe: 1.20

$$f(x) = e^{-2x+3}(1-x)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}$$

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = e^3(1) = e^3 \approx 20{,}0855$$

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ e^{-2x+3}(1-x) &= 0 e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: (0|20).

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: (1|0).

3. **Symmetrie**

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{2x+3}(1+x) \\ &\neq \quad f(x) \\ &\neq -f(x) \end{aligned}$$

   Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x\to\infty} e^{-2x+3}(1-x) = 0$$

   Für große x-Werte strebt die Exponentialfunktion schneller als jede Potenzfunktion gegen null. Da $1-x$ negativ ist, nähert sie sich der x-Achse von unten.

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-2x+3}(1-x) = +\infty$$

   Für kleine x-Werte (große negative Zahlen) wird die Exponentialfunktion unendlich groß. Aber ihre y-Werte sind positiv. $1-x$ ist dann positiv.

5. **Ableitungen**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-2x+3}(1-x)\\
f'(x) &= (-2)e^{-2x+3}(1-x) + e^{-2x+3}(-1)\\
&= e^{-2x+3}(-2+2x) + (-1)e^{-2x+3}\\
&= e^{-2x+3}(2x-3)\\
&= -e^{-2x+3}(3-2x)\\
f''(x) &= 2e^{-2x+3}(3-2x) + (-1)e^{-2x+3}\cdot(-2)\\
&= e^{-2x+3}(6-4x) + (-1)e^{-2x+3}\cdot(-2)\\
&= e^{-2x+3}(6-4x) + 2e^{-2x+3}\\
&= e^{-2x+3}(8-4x)\\
f'''(x) &= (-2)e^{-2x+3}(8-4x) + (-4)xe^{2x+3}\\
&= e^{-2x+3}(-16+8x) + (-4)xe^{2x+3}\\
&= e^{-2x+3}(-20+8x)\\
&= -e^{-2x+3}(20-8x)
\end{aligned}
$$

Eine Stammfunktion kann man entweder mit Hilfe der partiellen Integration oder durch Erraten erhalten:

(a) Erraten:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-2x+3}(1-x)\\
f'(x) &= -e^{-2x+3}(3-2x)\\
f''(x) &= e^{-2x+3}(8-4x)\\
f'''(x) &= -e^{-2x+3}(20-8x)
\end{aligned}
$$

Ein Faktor bleibt e^{-2x+3}. Der Vorfaktor vor dem dem „e-Term“ wechselt. In der Klammer wird der Vorfaktor vor dem x immer verdoppelt. Was mit der Zahl passiert ist nicht klar erkennbar. Also setzen wir für die Zahl a leiten ab und bestimmen a so, dass $f(x)$ herauskommt.

$$
\begin{aligned}
G(x) &= -e^{-2x+3}(a-0{,}5x)\\
g(x) &= 2e^{-2x+3}(a-0{,}5x) + (-1)e^{-2x+3}\cdot(-0{,}5)\\
g(x) &= e^{-2x+3}(2a-x) + e^{-2x+3}\cdot 0{,}5\\
g(x) &= e^{-2x+3}(2a+0{,}5-x)\\
2a+0{,}5 &= 1\\
2a &= 0{,}5\\
a &= 0{,}25
\end{aligned}
$$

$$F(x) = -e^{2x+3}(0{,}25-0{,}5x)$$

Die Probe!!! (die Ableitung von $F(x)$) ergibt $f(x)$.

(b) Die partielle Integration:

$$u(x) = 1 - x, \qquad v'(x) = e^{-2x+3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = 1 - x & v(x) = -0{,}5e^{-2x+3} \\ u'(x) = -1 & v'(x) = e^{-2x+3} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int (x-1) \cdot e^{-2x+3}\, dx &= (x-1) \cdot 0{,}5e^{2x+3} - \int 1 \cdot 0{,}5e^{2x+3}\, dx \\ &= (x-1) \cdot 0{,}5e^{2x+3} - 0{,}25e^{2x+3} \\ &= (0{,}5x - 0{,}5)e^{2x+3} - 0{,}25e^{2x+3} \\ &= e^{2x+3}(0{,}5x - 0{,}25)\end{aligned}$$

6. **Extremstellen**

(a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -e^{-2x+3}(3-2x) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ 3 - 2x &= 0 \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Bei $x = 1{,}5$ ist eine mögliche Extremstelle.

(b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

$$f'(1{,}5) \text{ und } f''(1{,}5) = e^{-3+3}(8-6) = e^0 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 > 0$$

Extremstelle:

$$f(1{,}5) = e^{-3+3}(-0{,}5) = (-0{,}5)e^0 = -0{,}5$$

Der Graph von f hat einen Tiefpunkt bei $(1{,}5|-0{,}5)$.

7. **Monotonieverhalten**

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-2x+3}(3-2x) \\ f'(x) &> 0, \quad x < 1{,}5 \\ f'(x) &< 0, \quad x > 1{,}5 \end{aligned}$$

Die Funktion ist im Intervall $(-\infty; 1{,}5)$ streng monoton steigend und im Intervall $(1{,}5; \infty)$ ist sie streng monoton fallend.

8. **Wendestellen**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f''(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ e^{-2x+3}(8-4x) &= 0 \qquad\qquad e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   Bei $x = 2$ ist eine mögliche Wendestelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$

   $$f''(2) = 0 \text{ und } f'''(2) = -e^{-1}(4) = \frac{-4}{e} < 0, \text{ da } e^x > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Wendepunkt

$$f(2) = e^{-1}(-1) = \frac{-1}{e} \approx -0{,}368$$

Der Graph von f hat einen Wendepunkt bei $(2|-0{,}4)$.

9. **Bild**

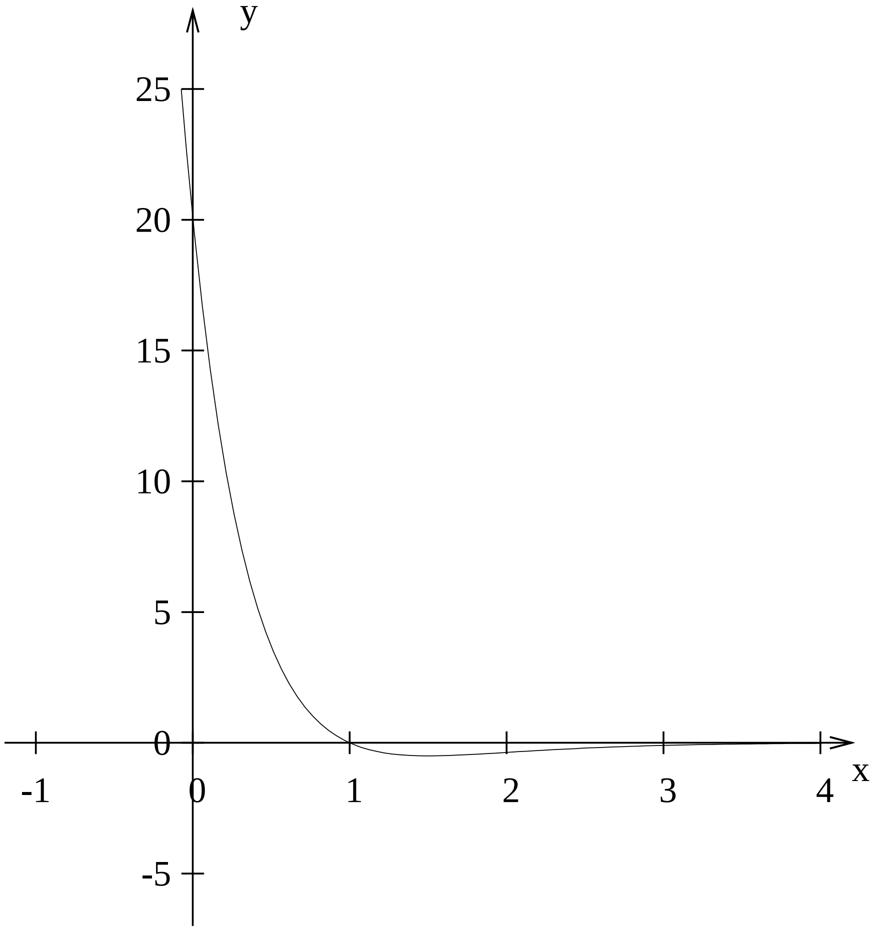


Abbildung 1.8: $f(x) = e^{-2x+3}(1-x)$

Zu Aufgabe: 1.21

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

1. **Definitionsbereich:**

$$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}$$

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:**

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + 1 = 2 \\ f(x) &= 0 \\ e^x + e^{-x} &= 0 \\ e^x &= e^{-x} && \mid \text{Exponentenvergleich} \\ x &= -x \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung. Also schneidet die Funktion nie die x-Achse. Stimmt ja in soweit mit dem Modell überein.

(0|2)

3. **Symmetrie:**

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{-x} + e^x && \mid \text{umsortieren} \\ &= e^x + e^{-x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f ist achsensymmetrisch.

4. **Verhalten im Unendlichen:**

$$\lim_{x \to \infty} = \infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} = \infty$$

Beide Summanden sind immer positiv, einer wird immer unendlich groß, wenn x gegen +/- unendlich geht.

5. **Ableitungen / Stammfunktion:**

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + e^{-x} \\ f'(x) &= e^x - e^{-x} \\ f''(x) &= e^x + e^{-x} \\ f'''(x) &= e^x - e^{-x} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine Stammfunktion sofort:

$$F(x) = e^x - e^{-x}$$

6. **Extrempunkte:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ e^x - e^{-x} &= 0 \\ e^x &= e^{-x} && \mid \text{Exponentenvergleich} \\ x &= -x \\ 2x &= 0 \\ f''(0) &= 2 \end{aligned}$$

   Bei (0|2) ist ein Tiefpunkt vorhanden. Da die Funktion achsensymmetrisch ist, muss dort auch eine Extremstelle sein. Es passt also zusammen.

7. **Monotonieverhalten des Graphen:**

$$f'(x) \neq 0, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

   Es gilt also:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0, \quad x < 0 \\ f'(x) &> 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

   Die Funktion ist im Intervall $(-\infty; 0)$ streng monoton fallend und im Intervall $(0; \infty)$ ist sie streng monoton steigend.

8. **Wendepunkte:**

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ e^x + e^{-x} &= 0 \end{aligned}$$

   Die Gleichung hat keine Lösung, siehe oben.

9. **Bild**

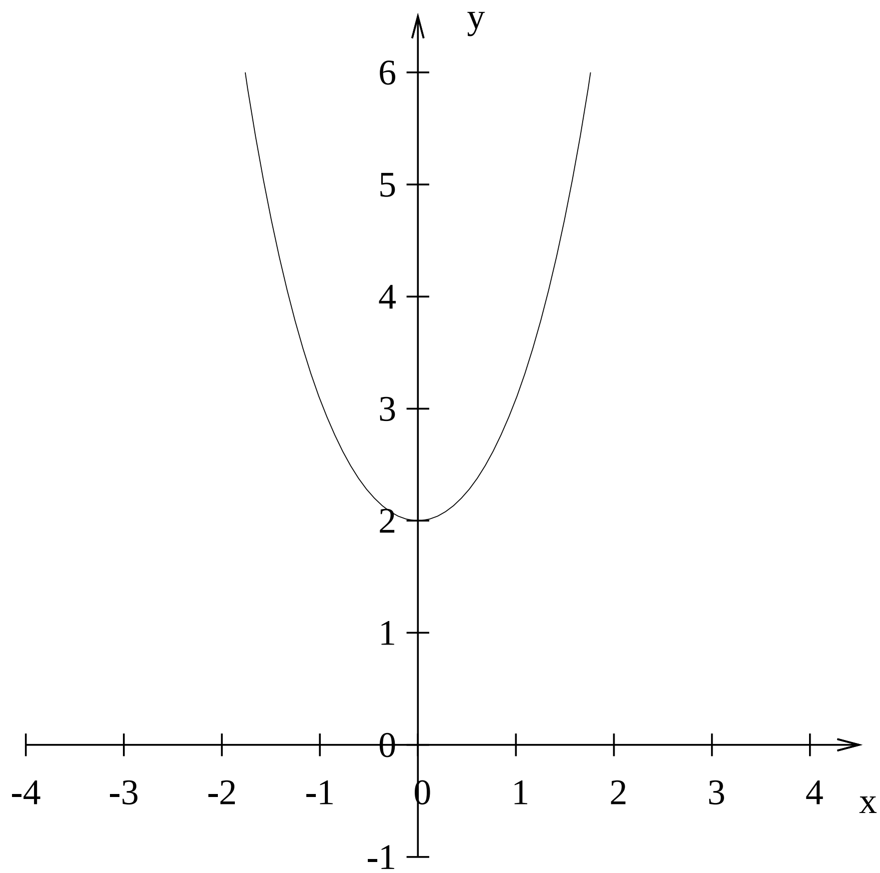


Abbildung 1.9: $f(x) = e^x + e^{-x}$

1.9 Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen kann man nicht immer lösen. Es gibt drei Verfahren. Weil es kein allgemeines Verfahren gibt, muss man sich immer kreativ für ein Verfahren entscheiden. Manchmal kann man eine solche Gleichung auch gar nicht lösen. Dieser Fall tritt in der Schule bei der Nullstellenbestimmung wohl nicht auf.

1. Lösen mit Hilfe des Logarithmus
2. Vergleich der Exponenten
3. Substitution

1.9.1 Lösen mit Hilfe des Logarithmus

Beispiel:

$$\begin{array}{rcll}
10 &=& 5 \cdot e^{3x+1} & | \; :5 \\
2 &=& e^{3x+1} & | \; \ln, \text{ auf beiden Seiten ln anwenden} \\
\ln(2) &=& 3x+1 & | \; -1 \\
\ln(2)-1 &=& 3x & | \; :3 \\
\frac{\ln(2)-1}{3} &=& x & \\
-0{,}1023 &=& x &
\end{array}$$

1.9.2 Vergleich der Exponenten

Diese Methode funktioniert, wenn die Basen gleich sind (oder gleich gemacht worden sind) und Sie nur zwei Potenzen haben.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcll}
e^{3x+1} &=& e^{6x-2} & | \; \text{Vergleich der Exponenten} \\
3x+1 &=& 6x-2 & | \; -3x \\
1 &=& 3x-2 & | \; +2 \\
3 &=& 3x & | \; :3 \\
1 &=& x &
\end{array}$$

1.9.3 Substitution

Manche Gleichungen lassen sich mit folgendem Schema lösen:
Bei der Substitution wird e^x durch z ersetzt (substituiert). Man erhält eine quadratische Gleichung mit z als Variable.

Es kann wie bei jeder quadratischen Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen geben.

Dann erfolgt die Rücksubstitution. Zu negativen Werten für z oder wenn z null ist, gibt es keine reellen Zahlen als Lösung für x. Denn $e^x > 0$ für x aus den reellen Zahlen.

Beispiel:

$$\begin{array}{rclll} 4e^{2x} - 2e^x - 2 & = & 0 & | & z = e^x, z^2 = e^{2x} \\ 4z^2 - 2z - 2 & = & 0 & | & \text{Lösen der quadratischen Gleichung} \\ z = 1 & \text{oder} & z = -0{,}5 & & \end{array}$$

1. $z = 1$

$$\begin{aligned} z &= 1 \\ e^x &= 1 \\ x &= \ln(1) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

2. $z = -0{,}5$
   e^x ist für $x \in \mathbb{R}$ immer positiv. Also gibt es keine reelle Zahl für x, die eingesetzt den z-Wert ergäbe.

Die Substitution lässt sich anwenden und führt auf eine quadratische Gleichung, wenn der eine Exponent das Doppelte des anderen ist:

$$\begin{aligned} z &= e^{3x} \\ z^2 &= e^{6x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{6x} + e^{3x} - 2 &= 0 \\ z^2 + z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

1.10 Exponentialgleichungen

Aufgabe 1.22

$$e^{3x+1} - e^{2x} = 0$$

(Lösung siehe Seite 77).

Aufgabe 1.23

$$4\,e^{2x} - 5\,e^{x} - 6 = 0$$

(Lösung siehe Seite 77).

Aufgabe 1.24

$$5\,e^{3x} - 2\,e^{x} = 0$$

(Lösung siehe Seite 77).

Aufgabe 1.25

$$e^{x} - 2\,e^{-x} + 1 = 0$$

(Lösung siehe Seite 77).

Aufgabe 1.26

$$e^{2x+1} - e^{x} - 12 = 0$$

(Lösung siehe Seite 78).

Aufgabe 1.27

$$e^{3x} - 4\,e^{x} + 3\,e^{x} = 0$$

(Lösung siehe Seite 78).

Aufgabe 1.28

$$e^{4x} - 5\,e^{2x} + 4 = 0$$

(Lösung siehe Seite 79).

Aufgabe 1.29

$$e^{10x} + e^{5x} - 2 = 0$$

(Lösung siehe Seite 79).

Aufgabe 1.30

$$e^{3x-4} - e^{x} = 0$$

(Lösung siehe Seite 80).

1.11 Lösungen zu den Exponentialgleichungen

Zu Aufgabe: 1.22
Lösung durch Exponentenvergleich:

$$\begin{aligned} e^{3x+1} - e^{2x} &= 0 \\ e^{3x+1} &= e^{2x} && \mid \text{Exp.-vergl.} \\ 3x+1 &= 2x \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 1.23

$$\begin{aligned} 4\,e^{2x} - 5\,e^{x} - 6 &= 0 && \mid z = e^x \\ 4z^2 - 5z - 6 &= 0 \\ z &= -3 \text{ od. } z = 2 \end{aligned}$$

Es gibt nur eine Lösung, weil $e^x > 0$ für alle reellen Zahlen gilt. $x = \ln(2)$.

Zu Aufgabe: 1.24
Lösung durch Exponentenvergleich:

$$\begin{aligned} 5\,e^{3x} - 2\,e^{x} &= 0 \\ 5\,e^{3x} &= 2\,e^{x} \\ e^{\ln(5)} \cdot e^{3x} &= e^{\ln(2)} \cdot e^{x} \\ e^{\ln(5)+3x} &= e^{\ln(2)+x} \\ \ln(5) + 3x &= \ln(2) + x \\ \ln(5) + 2x &= \ln(2) \\ 2x &= \ln(2) - \ln(5) \\ x &= \frac{\ln(2) - \ln(5)}{2} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 1.25

$$\begin{aligned} e^{x} - 2\,e^{-x} + 1 &= 0 && \mid \cdot e^x \\ e^x \cdot e^x - 2\,e^{-x} \cdot e^x + e^x &= 0 \\ e^{2x} - 2 + e^x &= 0 && \mid z = e^x \\ z^2 - 2 + z &= 0 \\ z^2 + z - 2 &= 0 \\ z = 1 \text{ od. } z &= -2 \end{aligned}$$

Da $e^x > 0$ für alle reellen Zahlen, gibt es nur eine Lösung.
$x = \ln(1) = 0$.

Zu Aufgabe: 1.26

$$
\begin{aligned}
e^{2x+1} - e^x - 12 &= 0 \\
e^1 \cdot e^{2x} - e^x - 12 &= 0 \\
e \cdot e^{2x} - e^x - 12 &= 0 && \mid z = e^x \\
ez^2 - z - 12 &= 0 \\
z^2 - \frac{1}{e}z - \frac{12}{e} &= 0 \\
z^2 - \frac{1}{e}z &= \frac{12}{e} \\
(z - \frac{1}{2e})^2 &= \frac{12}{e} + \frac{1}{4e^2} \\
(z - \frac{1}{2e})^2 &= \frac{48}{4e^2} + \frac{1}{4e^2} \\
(z - \frac{1}{2e})^2 &= \frac{49}{4e^2} \\
z - \frac{1}{2e} = -\frac{7}{2e} &\text{ od. } z - \frac{1}{2e} = \frac{7}{2e} \\
z = -\frac{6}{2e} &\text{ od. } z = \frac{8}{2e} \\
z = -\frac{3}{e} &\text{ od. } z = \frac{4}{e}
\end{aligned}
$$

Da $e^x > 0$ für alle reellen Zahlen, gibt es nur eine Lösung.

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{4}{e} \\
e^x &= \frac{4}{e} \\
x &= \ln(\frac{4}{e}) \\
x &= \ln(4) - \ln(e) \\
x &= \ln(4) - 1
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe: 1.27

Hier wird die Substitution angewendet und dann ausgeklammert:

$$
\begin{aligned}
z &= e^x \\
z^2 &= e^{2x} \\
z^3 &= e^{3x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{3x} - 4\,e^{2x} + 3\,e^x &= 0 \\
z^3 - 4z^2 + 3z &= 0 \\
z(z^2 - 4z + 3) &= 0
\end{aligned}
$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn ein Faktor null ist. Daraus ergeben sich die Lösungen zu:

$$z = 0$$
$$z = 1$$
$$z = 3$$

$e^x > 0$ für x aus den reellen Zahlen.

$$z = \ln(1) = 0$$
$$z = \ln(3)$$

Zu Aufgabe: 1.28
Hier wird wiederum die Substitution angewendet:

$$z = e^{2x}$$
$$z^2 = e^{4x}$$

$$e^{4x} - 5\,e^{2x} + 4 = 0$$
$$z^2 - 5z + 4 = 0$$
$$z = 1 \text{ od. } z = 4$$

$$e^{2x} = 1$$
$$2x = \ln(1)$$
$$2x = 0$$
$$x = 0$$

$$e^{2x} = 4$$
$$2x = \ln(4)$$
$$x = \frac{\ln(4)}{2}$$

Zu Aufgabe: 1.29
Hier wird wiederum die Substitution angewendet:

$$z = e^{5x}$$
$$z^2 = e^{10x}$$

$$e^{10x} + e^{5x} - 2 = 0$$
$$z^2 + z - 2 = 0$$
$$z = 1 \text{ od. } z = -2$$

$e^x > 0$ für alle x aus den rellen Zahlen:

$$\begin{aligned} e^{5x} &= 1 \\ 5x &= \ln(1) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 1.30
Lösung durch Exponentenvergleich:

$$\begin{aligned} e^{3x-4} - e^x &= 0 \\ e^{3x-4} &= e^x \\ 3x - 4 &= x \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

1.12 Arbeitsblätter

1.13 Mutter-Tochter-Kernzerfall

1. Polonium-218 zerfällt zu Blei-214. Sie haben zu Beginn der Messung 10g des Poloniums. Die chemische Analyse ergibt nach 2 Minuten nur noch 6,351 g Polonium.
   Bestimmen Sie die Zerfallsfunktion und die Halbwertszeit des Poloniums. Runden Sie Ihr Ergebnis auf drei Stellen hinter dem Komma.

2. Das Polonium zerfällt zu Blei. Das Blei seinerseits zerfällt zu Wismut. Die Zerfallsgeschwindigkeit (g/min) des Bleis ist bei diesem Prozess gegeben durch:
   $$f_2(t) = 2{,}564\, e^{-0{,}227t} - 0{,}294\, e^{-0{,}026t}$$
   Bestimmen Sie die Zeitpunkte, wann es keinen Zerfall gibt und wann eine

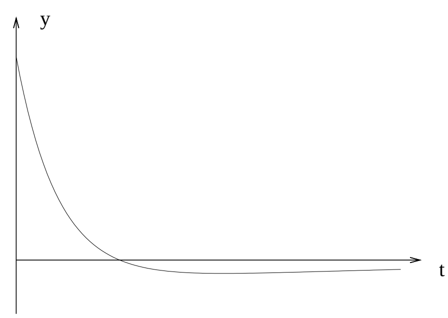


Abbildung 1.10: $f_2(t)$ - Die Zerfallsgeschwindigkeit.

minimale Zerfallsgeschwindigkeit vorliegt.

3. Begründen Sie, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse des Bleis null beträgt und bestimmen Sie die maximale Menge des Bleis.

4. Geben Sie eine Funktion m an, die die Menge des Bleis zu einem Zeitpunkt angibt.
   $$m : \text{Zeit in Minuten} \rightarrow \text{Menge in g}$$

1.14 Mutter-Tochter-Kernzerfall – Lösung

1. Polonium-218 zerfällt zu Blei-214. Sie haben zu Beginn der Messung 10g des Poloniums. Die chemische Analyse ergibt nach 2 Minuten nur noch 6,351 g Polonium.
   Bestimmen Sie die Zerfallsfunktion und die Halbwertszeit des Poloniums. Runden Sie Ihr Ergebnis auf drei Stellen hinter dem Komma.

   (a) Bestimmung der Zerfallsfunktion:

   $$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

t:	Zeit in Minuten.
$N(t)$:	Menge des Poloniums zum Zeitpunkt t in Gramm

   $$N_0 = 10$$
   $$N(2) = 6{,}351$$

   $$\begin{aligned} 6{,}351 &= 10 \cdot e^{-\lambda \cdot 2} \\ \ln\left(\frac{6{,}351}{10}\right) &= -\lambda \cdot 2 \\ \lambda &= 0{,}227 \end{aligned}$$

   $$N(t) = 10 \cdot e^{-0{,}227t}$$

   (b) Bestimmung der Halbwertszeit

   $$\begin{aligned} 0{,}5 &= e^{-0{,}227t} \\ \ln(0{,}5) &= -0{,}227t \\ t &= \frac{-\ln(2)}{-0{,}227} \\ t &= 3{,}05 \end{aligned}$$

   Die Halbwertszeit beträgt 3,05 Minuten bzw. 3 Minuten und 3 Sekunden.

2. Das Polonium zerfällt zu Blei. Das Blei seinerseits zerfällt zu Wismut. Die Zerfallsgeschwindigkeit (g/min) des Bleis ist bei diesem Prozess gegeben durch:

   $$f_2(t) = 2{,}564\, e^{-0{,}227t} - 0{,}294\, e^{-0{,}026t}$$

   Bestimmen Sie die Zeitpunkte, wann es keinen Zerfall gibt und wann eine minimale Zerfallsgeschwindigkeit vorliegt.

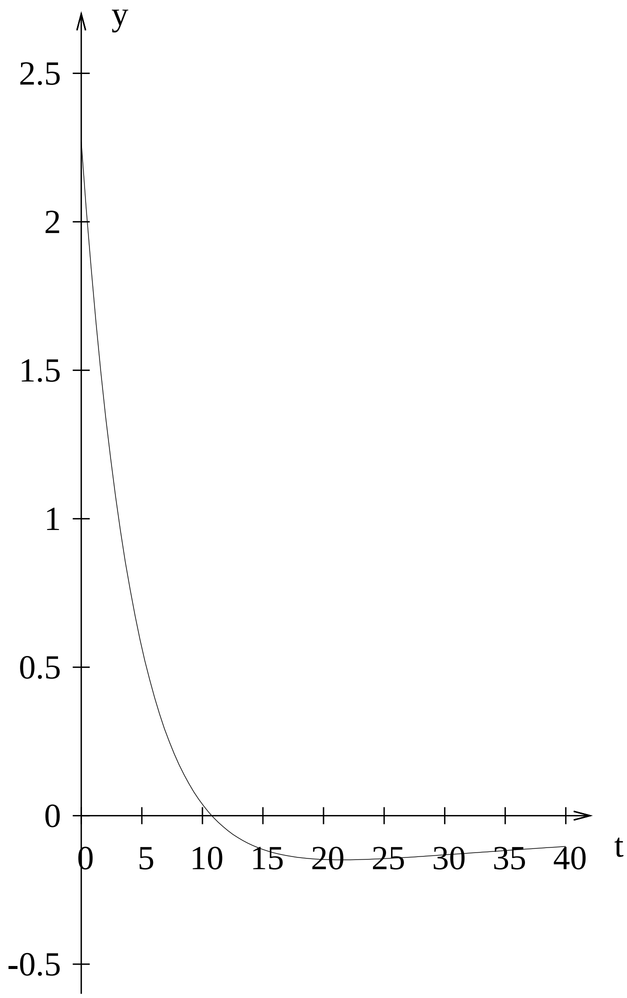


Abbildung 1.11: $f_2(t)$ - Die Zerfallsgeschwindigkeit.

(a) Wenn es keinen Zerfall gibt, ist die Zerfallsgeschwindigkeit null. Es entsteht gerade soviel Blei aus dem Polonium, wie Blei zu Wismut zerfällt.

Bestimmung der Nullstelle von f_2 mit Hilfe des Exponentenvergleichs:

$$\begin{aligned}
2{,}564\, e^{-0{,}227t} &= 0{,}294\, e^{-0{,}026t} \\
e^{\ln(2{,}564)-0{,}227t} &= e^{\ln(0{,}294)-0{,}026t} \\
\ln(2{,}564) - 0{,}227t &= \ln(0{,}294) - 0{,}026t \\
\ln(2{,}564) - \ln(0{,}294) &= (0{,}227 - 0{,}026)\, t \\
t &= \frac{\ln(2{,}564) - \ln(0{,}294)}{(0{,}227 - 0{,}026)} \\
t &= 10{,}77
\end{aligned}$$

Die Nullstelle ist bei 10,8 Minuten. Dies sind 10 Minuten und 48 Sekunden.

(b) Wann ist die Zerfallsgeschwindigkeit minimal?

Dazu muss das Minimum der Zerfallsgeschwindigkeit bestimmt werden. Da t nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, sondern nur für positive Zeiten, gibt es eine Intervallgrenze. Dann muss man also noch auf Randextrema untersuchen. Dazu muss man den gefundenen Extremwert mit den Werten der Intervallgrenze vergleichen.

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= 2{,}564\,e^{-0{,}227t} - 0{,}294\,e^{-0{,}026t}\\
f_2'(t) &= -0{,}582\,e^{-0{,}227t} + 0{,}008\,e^{-0{,}026t}\\
f_2''(t) &= 0{,}132\,e^{-0{,}227t} - 0{,}0002\,e^{-0{,}026t}
\end{aligned}$$

i. **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
f_2'(t) &= 0\\
-0{,}582\,e^{-0{,}227t} + 0{,}008\,e^{-0{,}026t} &= 0\\
0{,}008\,e^{-0{,}026t} &= 0{,}582\,e^{-0{,}227t}\\
\ln(0{,}008) - 0{,}026t &= \ln(0{,}582) - 0{,}227t\\
\ln(0{,}008) - \ln(0{,}582) &= (-0{,}227 + 0{,}026)\,t\\
\ln(0{,}008) - \ln(0{,}582) &= -0{,}201)\,t\\
t &= 21{,}329
\end{aligned}$$

Bei $t = 21{,}329$ ist eine mögliche Extremstelle.

ii. **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

$$f_2'(21{,}329) = 0 \text{ und } f_2''(21{,}329) = 0{,}0009 > 0$$

iii. **Das Minimum:**

$$\begin{aligned}
f_2(21{,}329) &= -0{,}149\\
f_2(0) &= 2{,}564 - 0{,}294 = 2{,}27
\end{aligned}$$

Das Minimum wird nach 21,329 Minuten (21 Minuten, 19 Sekunden) erreicht und die Zerfallsgeschwindigkeit beträgt: $-0{,}149\,\text{g/min}$

3. Begründen Sie, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse des Bleis null beträgt und bestimmen Sie die maximale Menge des Bleis.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist noch kein Polonium zerfallen. Deshalb ist zu dem Zeitpunkt auch noch kein Blei vorhanden.

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^{n_s} f_2(t)\,dt \\
M &= \int_0^{n_s} 2{,}564\,e^{-0{,}227t} - 0{,}294\,e^{-0{,}026t}\,dt \\
M &= \int_0^{10{,}775} 2{,}564\,e^{-0{,}227t} - 0{,}294\,e^{-0{,}026t}\,dt \\
M &= 7{,}55
\end{aligned}
$$

Die maximale Menge Blei beträgt 7,55 g.

4. Geben Sie eine Funktion m an, die die Menge des Bleis zu einem Zeitpunkt angibt.

$$m : \text{Zeit in Minuten} \to \text{Menge in g}$$

$$F(t) = \frac{2{,}564}{-0{,}227}\,e^{-0{,}227t} - \frac{0{,}294}{-0{,}026}\,e^{-0{,}026t} + c$$

Die Stammfunktion ist bis auf eine Konstante bestimmt. Wir benötigen einen Punkt, also die Menge zu einem Zeitpunkt, um die Mengenfunktion bestimmen zu können.

Zu Anfang $t = 0$ ist kein Blei vorhanden:

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 0 \\
\frac{2{,}564}{-0{,}227} - \frac{0{,}294}{-0{,}026} + c &= 0 \qquad | \, e^0 = 1 \\
c &= -0{,}0125
\end{aligned}
$$

Dies ergibt die endgültige Mengenfunktion (siehe Abb: 1.12):

$$m(t) = -\frac{2{,}564}{0{,}227}\,e^{-0{,}227t} + \frac{0{,}294}{0{,}026}\,e^{-0{,}026t} - 0{,}0125$$

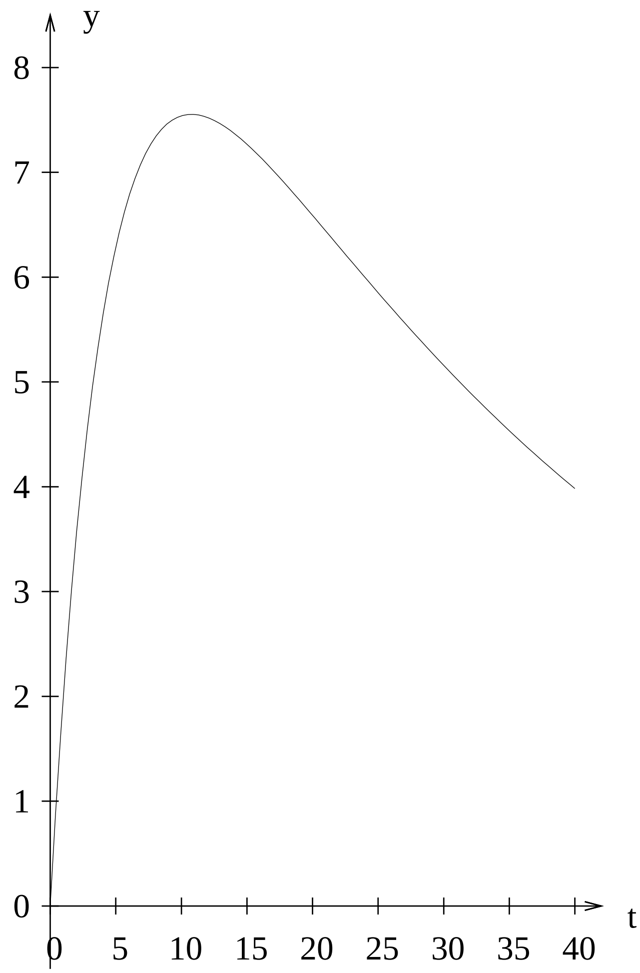


Abbildung 1.12: $m(t)$ - Die Menge des Bleis.

1.15 Kettenlinie (Erweiterung)

Wenn man ein Seil durchhängen läßt, dann kann man das Seil durch folgende Funktion beschreiben:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot \cosh(b \cdot x), \qquad a, b > 0 \\
\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
\sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)
\end{aligned}
$$

1. Zuerst untersuchen wir die beiden Funktionen sinh und cosh.
   (a) Untersuchen Sie sinh und cosh auf Nullstellen. (Lösung: 1a).
   (b) Untersuchen Sie sinh und cosh auf Symmetrie. (Lösung: 1b).
   (c) Zeigen Sie:
   $$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$
   (Lösung: 1c).

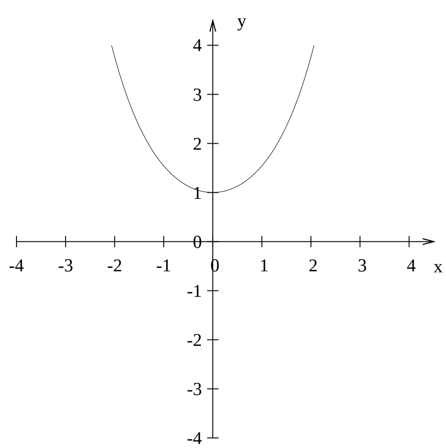


Abbildung 1.13:
$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$
Die Kettenlinie.

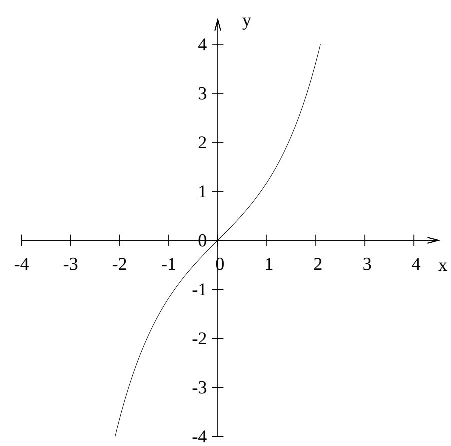


Abbildung 1.14:
$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

(d) Zeigen Sie:
$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$
(Lösung: 1d).

(e) Zeigen Sie:
$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$
(Lösung: 1e).

(f) Bestimmen Sie die Ableitung des tanh:
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
(Lösung: 1f).

(g) Zeigen Sie: sinh und cosh erfüllen jeweils die Differenzialgleichung:
$$f'' = f$$
(Lösung: 1g).

(h) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion des sinh folgende Funktion ist:
$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$
(Lösung: 1h).

(i) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion des cosh folgende Funktion ist:
$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
(Lösung: 1h).

2. Zeigen Sie, dass a die tiefste Höhe einer Kettenlinie ist. Beschreiben Sie, wie sich die Kettenlinie ändert, wenn b vergrößert oder verkleinert wird. (Lösung: 2).

3. Ein Seil soll zwischen zwei Masten gespannt werden. Das Seil hat am tiefsten Punkt eine Höhe von 20 m. Die beiden Masten, jeweils 22,5 m hoch, haben einen Abstand von 20 m.

   (a) Ermitteln Sie die Kettenlinie $k(x)$ für dieses Seil. Zeigen Sie dazu, dass gilt:
   $$k(x) = 20 \cosh(0{,}05x)$$
   (Lösung: 3a).

   (b) Berechnen Sie den Winkel zwischen Seil und Mast am Befestigungspunkt. (Lösung: 3b).

(c) Untersuchen Sie, wie sich die Parameter a und b und der Winkel am Befestigungspunkt ändern, wenn man das Seil straffer spannt, bzw. lockerer läst. (Lösung: 3c).

(d) Bestimmen Sie die Länge des Seils.

Für eine im Intervall [a;b] differenzierbare Funktion f kann man die Bogenlänge des Graphen von f berechnen durch:

$$l(x) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Benutzen Sie nicht die e-Funktion sondern arbeiten Sie mit cosh und sinh und benutzen Sie die obigen Beziehungen.

Vergleichen Sie mit einer ersten Abschätzung mit Hilfe des Pythagoras.

(Lösung: 3d).

(e) Die Kettenlinie soll durch eine einfachere Funktion genähert werden.

i. Nähern Sie die Kettenlinie durch eine quadratische Funktion (h(x)), welche ebenfalls durch das Minimum und die Befestigungspunkte gehen soll. (Lösung: 3(e)i).

ii. Nähern Sie die Kettenlinie durch eine quadratische Funktion:

$$q(x) = ax^2 + c$$

Diese Funktion soll durch die Befestigungspunkte gehen und dort dieselbe Tangentensteigung wie die Kettenlinie haben. Vergleichen Sie die Höhe des tiefsten Punktes. (Lösung: 3(e)ii).

iii. Nähern Sie die Kettenlinie durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades n(x), welche ebenfalls durch das Minimum und die Befestigungspunkte gehen soll. (Lösung: 3(e)iii).

iv. Bestimmen Sie eine bessere Näherung der Kettenlinie p(x), indem Sie die ersten 3 Glieder der Potenzfunktion verwenden. Wie ändert sich der Winkel am Befestigungspunkt? (Lösung: 3(e)iv).

v. Bestimmen Sie jeweils die Güte der Näherung indem Sie den jeweiligen Durchhängepunkt und den Winkel am Befestigungspunkt untersuchen.

Nehmen Sie abschließend Stellung.

(Lösung: 3(e)v).

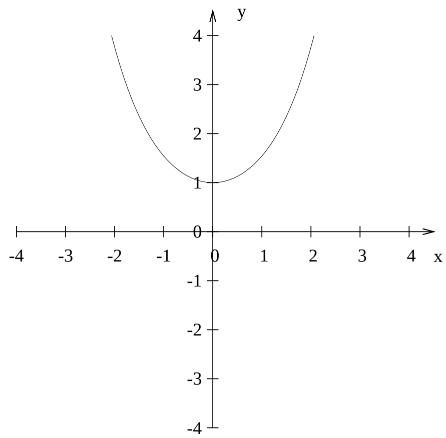


Abbildung 1.15:
$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$
Die Kettenlinie.

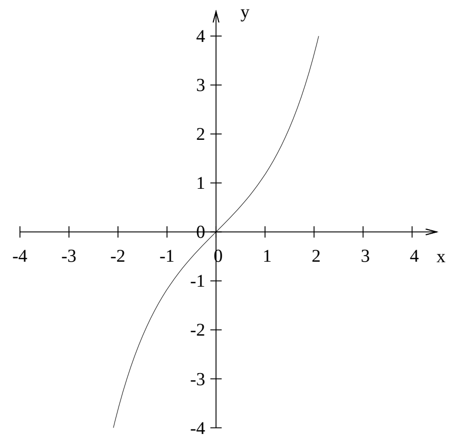


Abbildung 1.16:
$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

1.16 Kettenlinie – Lösung

Wenn man ein Seil durchhängen läßt, dann kann man das Seil durch folgende Funktion beschreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot \cosh(b \cdot x), \qquad a, b > 0 \\ \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \end{aligned}$$

1. Zuerst untersuchen wir die beiden Funktionen sinh und cosh.

   (a) Untersuchen Sie sinh und cosh auf Nullstellen.

i. sinh:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) &= 0 \\
e^x - e^{-x} &= 0 \\
e^x &= e^{-x} && \mid \text{Exponentenvergleich} \\
x &= -x \\
2x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist der Ursprung: $(0|0)$.

ii. cosh:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) &= 0 \\
e^x + e^{-x} &= 0 \\
e^x &= -e^{-x} \\
e^x &= -e^{-x}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann keine Lösung haben, da $e^x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und andererseits ist die linke Seite immer negativ, kleiner als null.

Zur Aufgabe: 1a.

(b) Untersuchen Sie sinh und cosh auf Symmetrie.

i. sinh:

$$\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^x\right)$$

Um jetzt zu entscheidne, ob eine Achsensymmetrie zur y-Achse ($\sinh(-x) = \sinh(x)$), Punktsymmetrie zum Ursprung ($\sinh(-x) = -\sinh(x)$) oder keins von beiden vorliegt, helfen folgende Überlegungen:
Dazu vergleichen wir die Summanden mit den jeweils gleichen Exponenten:
e^x: beim $\sinh(x)$ positives Vorzeichen, bei $\sinh(-x)$ ein negatives Vorzeichen. Dann können die beiden Funktionen $\sinh(x)$ und $\sinh(-x)$ nicht gleich sein. Eine Achsensymmetrie zur y-Achse liegt also nicht vor. Jetzt reicht es auf Punktsymmetrie zu untersuchen.
e^{-x}: beim $\sinh(x)$ positives Vorzeichen, bei $\sinh(-x)$ ein negatives Vorzeichen. Die Vorzeichen sind also jeweils vertauscht. Das spricht für die Punktsymmetrie zum Ursprung.

Dann probieren wir jetzt zu zeigen, dass die beiden Funktionen: $-\sinh(x)$ und $\sinh(-x)$ gleich sind:

$$\begin{aligned}
&= (-1)\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-e^{x} + e^{-x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-x}\right)\\
&= \sinh(-x)
\end{aligned}$$

Es liegt also eine Punktsymmetrie zur y-Achse vor.

ii. cosh:

$$\begin{aligned}
\cosh(-x) &= \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\\
&= \cosh(x)
\end{aligned}$$

Es liegt also eine Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

Zur Aufgabe: 1b

(c) Zeigen Sie:

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
\cosh^2 - \sinh^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^{x} - e^{-x}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\left((e^{x})^2 + 2e^{x}\cdot e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2\right) - \frac{1}{4}\left((e^{x})^2 - 2e^{x}\cdot e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right)\\
&= \frac{1}{4}(2+2)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Zur Aufgabe: 1c

(d) Zeigen Sie:

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - (-1)e^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\\ &= \cosh(x)\end{aligned}$$

Zur Aufgabe: 1d

(e) Zeigen Sie:

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\begin{aligned}\cosh'(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + (-1)e^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\\ &= \sinh(x)\end{aligned}$$

Zur Aufgabe: 1e

(f) Bestimmen Sie die Ableitung des tanh:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\begin{aligned}\tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\\ \tanh'(x) &= \frac{\cosh(x)\cdot\cosh(x) - \sinh(x)\cdot\sinh(x)}{\cosh^2(x)}\\ &= \frac{1}{\cosh^2(x)}\end{aligned}$$

Zur Aufgabe: 1f

(g) Zeigen Sie: sinh und cosh erfüllen jeweils die Differenzialgleichung:

$$f'' = f$$

i. sinh:

$$\begin{aligned}f''(x) &= \sinh''(x)\\ &= \cosh'(x)\\ &= \sinh(x)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

ii. cosh:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \cosh''(x) \\ &= \sinh'(x) \\ &= \cosh(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Zur Aufgabe: 1g

(h) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion des sinh folgende Funktion ist:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ y &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ 2y &= e^x - e^{-x} \\ 2y &= e^x - \frac{1}{e^x} && \mid \cdot e^x \\ 2y \cdot e^x &= e^x \cdot e^x - 1 && \mid \text{umstellen} \\ 0 &= e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 && \mid \text{Seiten vertauschen} \\ e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 &= 0 && \mid e^x = z \end{aligned}$$

So ergibt sich eine quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} z^2 - 2yz &= 1 \\ (z-y)^2 &= 1 + 4y^2 \\ z - y &= \pm\sqrt{1+y^2} \\ z = y - \sqrt{1+y^2} &\text{ oder } z = y + \sqrt{1+y^2} && \mid \text{Rücksubstitution} \\ e^x = y - \sqrt{1+y^2} &\text{ oder } e^x = y + \sqrt{1+y^2} && \mid \ln \\ x = \ln\left(y - \sqrt{1+y^2}\right) &\text{ oder } x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) && \mid \text{Vertauschen von } x \text{ und } y \\ y = \ln\left(x - \sqrt{1+x^2}\right) &\text{ oder } y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \end{aligned}$$

Da gilt:

$$x = \sqrt{x^2}, \qquad \text{für } x > 0$$

gilt erst recht:

$$x < \sqrt{1+x^2}$$

kann man von diesem Ausdruck nicht den Logarithmus nehmen. Darum gibt es nur eine Funktion als Lösung:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Zur Aufgabe: 1h

(i) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion des cosh folgende Funktion ist:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
y &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
2y &= e^x + e^{-x} \\
2y &= e^x + \frac{1}{e^x} && \mid \cdot e^x \\
2y \cdot e^x &= e^x \cdot e^x + 1 && \mid \text{umstellen} \\
0 &= e^{2x} - 2y \cdot e^x + 1 && \mid \text{Seiten vertauschen} \\
e^{2x} - 2y \cdot e^x + 1 &= 0 && \mid e^x = z
\end{aligned}$$

So ergibt sich eine quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}
z^2 - 2yz &= -1 \\
(z - y)^2 &= -1 + 4y^2 \\
z - y &= \pm\sqrt{-1 + y^2} \\
z - y &= \pm\sqrt{y^2 - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z = y - \sqrt{y^2 - 1} \text{ oder } z = y + \sqrt{y^2 - 1} && \mid \text{Rücksubstitution} \\
e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} \text{ oder } e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} && \mid \ln \\
x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \text{ oder } x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) && \mid \text{Vertauschen von } x \text{ und } y \\
y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \text{ oder } y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)
\end{aligned}$$

Vom cosh kann man nicht einfach so eine Umkehrfunktion bilden. Zu einem y-Wert gibt es immer zwei x-Werte. Oder mathematisch: die Ableitung von $\cosh(x)$ muss immer größer (oder kleiner) als null sein, damit man die Umkehrfunktion bilden kann.

Hier muss man vom rechten und linken Ast die Umkehrung getrennt angeben.

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcosh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), && y > 0 \\
\operatorname{arcosh}(x) &= \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right), && y < 0
\end{aligned}$$

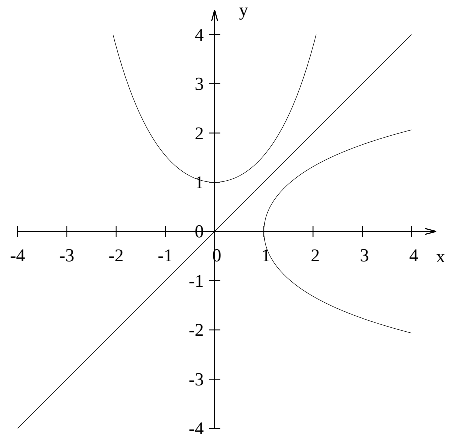


Abbildung 1.17:
$\text{arcosh}(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{1+x^2}\right)$

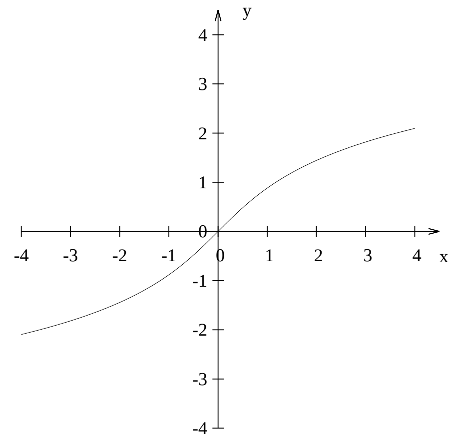


Abbildung 1.18:
$\text{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Dann muss ja eigentlich gelten:

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = -\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$

Dies ist auch so, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
-\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) &= \ln\left(\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}\right) && \mid \text{Erweitern mit } x + \sqrt{x^2-1} \\
&= \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{(x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})}\right) && \mid \text{3. Binomische Formel} \\
&= \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{(x^2 - (x^2-1))}\right) \\
&= \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{1}\right) \\
&= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)
\end{aligned}$$

Zur Aufgabe: 1i

2. Zeigen Sie, dass a die tiefste Höhe einer Kettenlinie ist. Beschreiben Sie, wie sich die Kettenlinie ändert, wenn b vergrößert oder verkleinert wird.

   Bei dieser Aufgabe muss man zwei Dinge tun. Das lokale Minimum suchen und zeigen, dass es auch das absolute ist.

   Alternative I

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot \cosh(b \cdot x) \\ f'(x) &= ab \cdot \sinh(b \cdot x) \\ 0 &= ab \cdot \sinh(b \cdot x) \\ 0 &= bx \\ 0 &= x \end{aligned}$$

   Alternative II

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot \cosh(b \cdot x) \\ f'(x) &= ab \cdot \sinh(b \cdot x) \\ &= ab \cdot \frac{1}{2}\left(e^{bx} - e^{-bx}\right) \\ 0 &= ab \cdot \frac{1}{2}\left(e^{bx} - e^{-bx}\right) \\ 0 &= e^{bx} - e^{-bx} \\ e^{-bx} &= e^{bx} && \mid \text{Exponentenvergleich} \\ -bx &= bx \\ -x &= x \\ 0 &= 2x \\ 0 &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= ab^2 \cosh(b \cdot 0) \\ &= ab^2 \frac{1}{2}\left(e^{b\cdot 0} + e^{-b\cdot 0}\right) \\ &= ab^2 \frac{1}{2}(1+1) \\ &= ab^2 > 0 && \mid \text{laut Voraussetzung: } a, b > 0 \end{aligned}$$

   Dies muss auch das absolute Minimum sein, denn es gibt nur eine Extremstelle und der Definitionsbereich sind alle reellen Zahlen. Es gibt also keine Lücken.

   Rechts von der Null, also für alle x-Werte größer als null, ist die Steigung positiv, also steigt f(x).

   Links von der Null, also für alle x-Werte kleiner als null, ist die Steigung negativ, also sinkt f(x). Zur Aufgabe: 2

3. Ein Seil soll zwischen zwei Masten gespannt werden. Das Seil hat am tiefsten Punkt eine Höhe von 20 m. Die beiden Masten, jeweils 22,5 m hoch, haben einen Abstand von 20 m.

   (a) Ermitteln Sie die Kettenlinie ($k(x)$) für dieses Seil. Zeigen Sie dazu, dass gilt:
   $$k(x) = 20\cosh(0{,}05x)$$
   Es gelten folgende Bedingungn:
   $$\begin{aligned} k(0) &= 20 \\ k(10) &= 22{,}5 \\ k(-10) &= 22{,}5 \end{aligned}$$
   Da $\cosh(x)$ symmetrisch zur y-Achse ist, ist die letzte Information überflüssig. Wir verwenden zur Bestimmung der beiden Parameter a und b die ersten beiden Gleichungen:
   $$\begin{aligned} k(x) &= a \cdot \cosh(b \cdot x) \\ k(x) &= a\frac{1}{2}\left(e^{bx} + e^{-bx}\right) \end{aligned}$$
   Die erste Gleichung ergibt:
   $$\begin{aligned} k(0) &= 20 \\ k(0) &= a\frac{1}{2}\left(e^{b\cdot 0} + e^{-b\cdot 0}\right) \\ 20 &= a\frac{1}{2}(1+1) \\ 20 &= a \end{aligned}$$
   Die zweite Gleichung ergibt:
   $$\begin{aligned} k(10) &= 22{,}5 \\ k(10) &= 20\frac{1}{2}\left(e^{b\cdot 10} + e^{-b\cdot 10}\right) \\ 22{,}5 &= 20\frac{1}{2}\left(e^{b\cdot 10} + e^{-b\cdot 10}\right) \\ 2{,}25 &= e^{10b} + e^{-10b} \\ 2{,}25 &= e^{10b} + \frac{1}{e^{10b}} \end{aligned}$$

Um diese Gleichung zu lösen, substituieren wir: $z = e^{10b}$:

$$\begin{aligned} 2{,}25 &= z + \frac{1}{z} && \mid \cdot z \\ 2{,}25 \cdot z &= z^2 + 1 \\ z^2 - 2{,}25 \cdot z + 1 &= 0 \\ z &= 1{,}64 \text{ oder } z = 0{,}61 \end{aligned}$$

Die Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} e^{10b} &= z \\ 10b_1 &= \ln(z) \\ 10b_1 &= \ln(1{,}64) \\ 10b_1 &= 0{,}5 \\ b_1 &= 0{,}05 \\ 10b_2 &= \ln(0{,}6) \\ 10b_2 &= -0{,}5 \\ b_2 &= -0{,}05 \end{aligned}$$

Die beiden Funktionen sind natürlich identisch:

$$\begin{aligned} k_1(x) &= 20\frac{1}{2}\left(e^{0{,}05x} + e^{-0{,}05x}\right) \\ k_2(x) &= 20\frac{1}{2}\left(e^{-0{,}05x} + e^{0{,}05x}\right) \end{aligned}$$

Oder endgültig:

$$\begin{aligned} k(x) &= 20 \cosh(0{,}05x) \\ k(x) &= 10\left(e^{0{,}05x} + e^{-0{,}05x}\right) \end{aligned}$$

Zur Aufgabe: 3a

(b) Berechnen Sie den Winkel zwischen Seil und Mast am Befestigungspunkt.

Die Funktion ist symmetrisch, also reicht es, wenn wir uns nur den rechten Punkt anschauen.

$$\begin{aligned}
k(x) &= 10\left(e^{0,05x} + e^{-0,05x}\right)\\
k'(x) &= 10\left(0,05\,e^{0,05x} - 0,05\,e^{-0,05x}\right)\\
&= 10 \cdot 0,05\left(e^{0,05x} - e^{-0,05x}\right)\\
&= 0,5\left(e^{0,05x} - e^{-0,05x}\right)\\
k'(10) &= 0,5\left(e^{0,05\cdot 10} - e^{-0,05\cdot 10}\right)\\
&= 0,5\left(e^{0,5} - e^{-0,5}\right)\\
&= 0,521\\
\tan(\alpha) &= 0,521\\
\alpha &= \arctan(0,521)\\
\alpha &= 27,5^\circ
\end{aligned}$$

27,5° ist der Winkel zwischen der Tangente und dem Boden. Um den Winkel zwischen Mast und dem Seil zu bestimmen muss man das Dreieck Tangente, Boden und Mast betrachten. Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°, der Mast steht senkrecht ($\beta = 90^\circ$) auf dem Boden. Also ist der Winkel zwischen Seil und Mast γ:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ\\
\beta &= 180^\circ - \alpha - \gamma\\
\beta &= 180^\circ - 27,5^\circ - 90^\circ\\
\beta &= 62,5^\circ
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen Seil und Mast beträgt 62,5°. Zur Aufgabe: 3b

(c) Untersuchen Sie, wie sich die Parameter a und b und der Winkel am Befestigungspunkt ändern, wenn man das Seil straffer spannt, bzw. lockerer läst. Wenn das Seil straffer gespannt wird, wird der Winkel zwischen Seil und Mast am Befestigungspunkt größer. Gleichzeitig hängt das Seil nicht mehr so durch. Das Seil hebt sich in der Mitte an.

Wenn sich das Seil anhebt, dann verändert sich der y-Achsenschnittpunkt. Da die Kettenlinie immer durch den Punkt $(0|a)$ geht, wird a also größer.

Um zu entscheiden, welche Auswirkung auf den Parameter b das Straffen hat, schauen wir passiert, wenn b vergrößert wird bei einem beliebigen x-Wert:

Alternative I

$$k(x) = a \cdot \cosh(b \cdot x)$$

Wir untersuchen nur den rechten Ast. Das ist ok, weil $k(x)$ symmetrisch ist und somit unserer Überlegungen ohne Probleme auf den linken Ast übertragbar sind.

Wenn b vergrößer wird, wird auch bx größer. Damit wird in den cosh ein größerer Wert eingesetzt. Damit wird aber dann auch der y-Wert von $k(x)$ größer. Also wird die Funktion steiler.

Alternative II Hier untersuchen wir, was passiert, wenn man den x-Wert festhält, aber b verändert. Wir leiten - bei festem x - nach b ab:

$$\begin{aligned} k(x) &= a \cdot \cosh(b \cdot x) \\ k(x) &= \frac{a}{2}\left(e^{bx} + e^{-bx}\right) \\ \frac{dk}{db} &= \frac{a}{2}\left(be^{bx} - be^{-bx}\right) \\ &= \frac{ba}{2}\left(e^{bx} - e^{-bx}\right) \\ &> 0, \quad \text{ weil } a, b > 0 \end{aligned}$$

Wenn b vergrößert wird, dann werden die y-Werte zu entsprechenden x-Werten auch größer. Die Funktion wird steiler. Wenn das Seil straffer wird, muss umgekehrt b kleiner werden.

Zur Aufgabe: 3c

(d) Bestimmen Sie die Länge des Seils.

Für eine im Intervall [a;b] differenzierbare Funktion f kann man die Bogenlänge des Graphen von f berechnen durch:

$$l(x) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Benutzen Sie nicht die e-Funktion sondern arbeiten Sie mit cosh und sinh und benutzen Sie die obigen Beziehungen.

Vergleichen Sie mit einer ersten Abschätzung mit Hilfe des Pythagoras.

$$\begin{aligned}
k(x) &= 10\left(e^{0{,}05x} + e^{-0{,}05x}\right) \\
k(x) &= 20\frac{1}{2}\left(e^{0{,}05x} + e^{-0{,}05x}\right) \\
k(x) &= 20\cosh(0{,}05x) \\
k'(x) &= 20 \cdot 0{,}05 \sinh(0{,}05x) \\
&= \sinh(0{,}05x) \\
l &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + (\sinh(0{,}05x))^2}\, dx \\
&= \int_{-10}^{10} (\cosh(0{,}05x))^2\, dx && |\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \\
&= \left[\frac{1}{0{,}05} \sinh(0{,}05x)\right]_{-10}^{10} \\
&= [20 \sinh(0{,}05x)]_{-10}^{10} && = 2 \cdot 20 \sinh(0{,}05 \cdot 10) \\
&= 10{,}4 - (-10{,}4) \\
&= 20{,}8
\end{aligned}$$

Wenn Sie die rechte Seite des Seils als Dreieck mit den Seitenlängen: $l/2$, 10 m und 2,5m auffassen:

$$\begin{aligned}
l/2 &= \sqrt{10^2 + 2{,}5^2} \\
l &= 2\sqrt{10^2 + 2{,}5^2} \\
&= 20{,}6
\end{aligned}$$

Sie schätzen das Seil soweit ganz gut.

Zur Aufgabe: 3d

(e) Die Kettenlinie soll durch eine einfachere Funktion genähert werden.

i. Nähern Sie die Kettenlinie durch eine quadratische Funktion (h(x)), welche ebenfalls durch das Minimum und die Befestigungspunkte gehen soll.
   Eine quadratische Funktion, die symmetrisch ist, hat zwei Parameter:
   $$h(x) = ax^2 + c$$
   Dann werden auch nur zwei Gleichungen benötigt.
   $$\begin{aligned} h(0) &= 20 \\ h(10) &= 22{,}5 \end{aligned}$$

Ergibt dann folgende Gleichungen:

$$c = 20$$
$$a \cdot 10^2 + c = 22{,}5$$

$$c = 20$$
$$a = 0{,}025$$
$$h(x) = 0{,}025x^2 + 20$$

Zur Aufgabe: 3(e)i

ii. Nähern Sie die Kettenlinie durch eine quadratische Funktion:

$$q(x) = ax^2 + c$$

Diese Funktion soll durch die Befestigungspunkte gehen und dort dieselbe Tangentensteigung wie die Kettenlinie haben. Vergleichen Sie die Höhe des tiefsten Punktes.
Es werden nur zwei Gleichungen benötigt.

$$q(10) = 22{,}5$$
$$q'(10) = k'(10)$$
$$= 0{,}521$$

Ergibt dann folgende Gleichungen:

$$a \cdot 10^2 + c = 22{,}5$$
$$2a \cdot 10 = 0{,}521$$

$$a = 0{,}026$$
$$c = 19{,}90$$
$$q(x) = 0{,}026x^2 + 19{,}9$$

Der tiefste Punkt liegt bei dieser Näherung etwas zu hoch. Zur Aufgabe: 3(e)ii

iii. Nähern Sie die Kettenlinie durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades n(x), welche ebenfalls durch das Minimum und die Befestigungspunkte gehen soll. Eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die symmetrisch zur y-Achse ist, hat drei Parameter:

$$n(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$n(0) = 20$$
$$n(10) = 22{,}5$$
$$n'(10 = k'(10)$$
$$= 0{,}521$$
$$= 4ax^3 + 2bx$$

Dies ergibt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} c &= 20 \\ a \cdot 10^4 + b \cdot 10^2 + c &= 22{,}5 \\ 4a \cdot 10^3 + 2b \cdot 10 &= 0{,}521 \end{aligned}$$

Diese haben als Lösung:

$$\begin{aligned} a &= -0{,}0001 \\ b &= 0{,}224 \\ c &= 20 \end{aligned}$$

$$n(x) = 0{,}00001x^4 + 0{,}024x^2 + 20$$

Zur Aufgabe: 3(e)iii

iv. Bestimmen Sie eine bessere Näherung der Kettenlinie p(x), indem Sie die ersten 3 Glieder der Potenzfunktion verwenden. Wie ändert sich der Winkel am Befestigungspunkt?

$$k(x) = 10\left(e^{0{,}05x} + e^{-0{,}05x}\right)$$

Die ersten Terme der Potenzfunktion von e^x ist:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + 1x + \frac{1}{2}x^2 + ... \\ e^{0{,}05x} &= 1 + 0{,}05x + \frac{1}{2}(0{,}05x)^2 + ... \\ &= 1 + 0{,}05x + 0{,}00125x^2 ... e^{-0{,}05x} \quad = 1 - 0{,}05x + \frac{1}{2}(-0{,}05x)^2 + ... \\ &= 1 - 0{,}05x + 0{,}00125x^2 ... \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$\begin{aligned} k(x) &= 10\left(e^{0{,}05x} + e^{-0{,}05x}\right) \\ p(x) &= 10\left(1 + 0{,}05x + 0{,}00125x^2 + 1 - 0{,}05x + 0{,}00125x^2\right) \\ &= 10\left(0{,}0025x^2 + 2\right) \\ &= 0{,}025x^2 + 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(0) &= 20 \\ p(10) &= 22{,}5 \end{aligned}$$

Die Punkte stimmen überein. Der Winkel muss noch untersucht werden:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0{,}025x^2 + 20 \\ p'(x) &= 0{,}05x \\ p'(10) &= 0{,}5 \\ \tan(\alpha) &= 0{,}05 \\ \alpha &= 26{,}6° \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen Seil und Mast beträgt also 63,4°. Zur Aufgabe: 3(e)iv

v. Bestimmen Sie jeweils die Güte der Näherung, indem Sie den jeweiligen Durchhängepunkt und den Winkel am Befestigungspunkt untersuchen.

$$\begin{aligned} k(x) &= 10\left(e^{0{,}05x} + e^{-0{,}05x}\right) \\ h(x) &= 0{,}025x^2 + 20 \\ q(x) &= 0{,}026x^2 + 19{,}9 \\ n(x) &= 0{,}00001x^4 + 0{,}024x^2 + 20 \\ p(x) &= 0{,}025x^2 + 20 \end{aligned}$$

Funktion	Durchhängepunkt	Winkel
k(x)	20	62,5°
h(x)	20	63,4°
q(x)	19,9	62,5°
n(x)	20	62,5°
p(x)	20	63,4°

Nehmen Sie abschließend Stellung.
Die Winkel stimmen bei allen Näherungen einigermaßen überein. Die Näherungen sind insoweit alle gleich gut.
Weiter Untersuchungsmöglichkeiten zur Klassifizierung der Güte einer Näherung sind:

- Die maximale Differenz zur Kettenlinie.
- Der Seillängenunterschied.

Zur Aufgabe: 3(e)v

1.17 Grenzmatrix

Wir untersuchen wie sich bei folgender stochastischen Matrix die Grenzverteilung einstellt:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass Sie M auch als Produkt schreiben können:

$$M = SDS^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

   Wenn Sie den Leistungskurs besuchen, üben Sie bitte auch nochmal die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren.

2. Bestimmen Sie nun die Grenzmatrix und Grenzverteilung:

$$G = \lim_{n \to \infty} SD^x S^{-1}$$

3. Gehen Sie aus von der Verteilung $(1/0)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie dann eine Funktion für die x-Komponente und für die y-Komponente.

4. Nach wievielen Schritten ist die Differenz der x-Komponente zu der der Grenzverteilung kleiner als 0,001?

5. Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor für die x-Komponente.

1.18 Grenzmatrix – Lösung

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass Sie M auch als Produkt schreiben können:

$$M = SDS^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie nun die Grenzmatrix und Grenzverteilung:

$$G = \lim_{n\to\infty} SD^x S^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} D^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Grenzmatrix:

$$G = \lim_{n\to\infty} SD^x S^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Gehen Sie aus von der Verteilung $(1/0)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie dann eine Funktion für die x-Komponente und für die y-Komponente.

$$\begin{aligned} M^x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}^x \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}3^x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \cdot 0{,}3^x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 + 5 \cdot 0{,}3^x \\ 5 - 5 \cdot 0{,}3^x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Nach wievielen Schritten ist die Differenz der x-Komponente zu der der Grenzverteilung kleiner als 0,1?

$$\begin{aligned} 0{,}001 &= \left(\frac{2}{7} + 5 \cdot 0{,}3^x\right) - \frac{2}{7} \\ 0{,}001 &= 5 \cdot 0{,}3^x \\ \log_{0{,}3}(0{,}001) &= 5{,}7 \end{aligned}$$

Nach 6 Schritten wird die Differenz von 0,001 unterschritten.

5. Bestimmen Sie den Wachstumsfaktor für die x-Komponente.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot 0{,}3^x \\ &= \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot e^{\ln(0{,}3)x} \\ &= \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot e^{\ln\left(\frac{3}{10}\right)x} \\ &= \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot e^{-\ln\left(\frac{10}{3}\right)x} \end{aligned}$$

   Der Wachstumsfaktor ist dann: $\ln\left(\frac{10}{3}\right) = 1{,}2$.

Kapitel 2

Differenzialgleichungen

Manchmal ist das Wachstum einer Funktion verknüpft mit der Funktion selber.

Beispiel: In einem Wald leben Wölfe und Schafe. Die Wölfe leben nur von den Schafen und die Schafe werden nur durch die Wölfe gegessen. Es gibt zwei Extremsituationen: Wenn es viele Wölfe gibt und wenn es sehr wenige Wölfe gibt:

1. Viele Wölfe:
   Dann werden viele Schafe gegessen und die Schafe dezimieren sich schnell. Die vielen Wölfe haben bald nicht mehr genug zu essen und verhungern.

2. Wenige Wölfe:
   Die Wölfe essen wenige Schafe. Die Schafe können sich daraufhin vermehren. Die Wölfe finden genug Nahrung und werden sich auch vermehren.

Das Wachstum der Anzahl der Wölfe ist also abhängig von der Menge der Wölfe und Schafe.

Eine Gleichung, in der eine Ableitung einer Funktion vorkommt, nennt man Differenzialgleichung (DGL). Die einfachste Diffenzialgleichung ist:

$$f'(x) = f(x)$$

Diese Differenzialgleichung war die Motivation der Einführung der e-Funktion.

$$f(x) = e^x$$

Um eine Differenzialgleichung zu lösen, muss man (geschickt) raten. Es gibt keine Lösung zu jeder denkbaren Differenzialgleichung. Man unterscheidet die einzelnen Formen und für einzelne Typen von Differenzialgleichung hat man Lösungsstrategien entwickelt.

Beispiele für Differenzialgleichungen lassen sich in der Natur und damit in der Physik oft finden.

1. Bei Abkühlungsvorgängen ist die Abkühlung eines Stoffes (die Steigung der Temperaturkurve) umso größer, je größer die Differenz zur Umgebung ist.

100° heißes Wasser kühlt bei Zimmertemperatur schneller auf 90° ab, als 40° heißes Wasser.

2. Eine Stromänderung (Ableitung der Stromfunktion) erzeugt in einer Spule einen Strom (Dynamo)

3. In der Thermodynamik gibt es keine absolute Wärme, sondern nur Wärmedifferenzen (Ableitungen

Wir werden die Differenzialgleichungen benötigen, um die verschiedenen Wachstumsarten zu unterscheiden.

1. exponentielles Wachstum

2. beschränktes Wachstum

3. logistisches Wachstum

In den folgenden Abschnitten werden aus Differenzialgleichungen die entsprechenden Funktionen hergeleitet. Dazu wird f (und x) jeweils als eigenständige Variable betrachtet. Es gilt:

$$f(x) = 6x$$
$$F(x) = 3x^2$$

Oder in Kurzschreibweise:

$$\int 6x\,dx = 3x^2$$

dann gilt aber auch für die Variable f:

$$\int 6f\,dx = 3f^2$$

2.1 Exponentielles Wachstum

$$\begin{aligned}
f'(x) &= kf(x) && k > 0\\
\frac{df}{dx} &= kf\\
df &= kf\,dx\\
\frac{1}{f}\,df &= k\,dx
\end{aligned}$$

Integrieren auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned}
\ln(|f|) &= kx + c\\
|f| &= e^{kx+c} && c \in \mathbb{R}\\
|f| &= e^{kx} \cdot e^{c}\\
f(x) &= a \cdot e^{kx} && |a| = e^{c}\\
f(x) &= a \cdot e^{kx} && a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2.2 Beschränktes Wachstum

$$\begin{aligned}
f'(x) &= k(S - f(x))\\
\frac{df}{dx} &= k(S - f)\\
\frac{1}{(S-f)}\,df &= k\,dx\\
(-1)\ln(|S - f|) &= kx + c\\
\ln(|S - f|) &= -kx - c\\
|S - f| &= e^{-kx-c}\\
S - f &= a \cdot e^{kx} && a \in \mathbb{R}\\
S - ae^{-kx} &= f\\
f(x) &= S - a \cdot e^{-kx}
\end{aligned}$$

2.3 Logistisches Wachstum

Für die Herleitung wird die Partialbruchzerlegung benutzt. (Die Herleitung ist in der Regel eher ein erweiterter Stoff.)

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{S-f} = \frac{S-f}{f(S-f)} + \frac{f}{f(S-f} = \frac{S-f+f}{f(S-f)} = \frac{S}{f(S-f)}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= k \cdot f(x) \cdot (S - f(x)) \\
\frac{df}{dx} &= k(f \cdot (S - f)) \\
\frac{df}{f \cdot (S - f)} &= k\,dx \\
\frac{1}{f \cdot (S - f)}\,df &= k\,dx \\
\frac{1}{S}\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{S - f}\right)df &= k\,dx \\
\frac{1}{f} + \frac{1}{S - f}\,df &= Sk\,dx && \text{integrieren} \\
\ln(|f|) + \ln(|S - f|) &= Skx + c \\
\ln\left(\left|\frac{f}{S - f}\right|\right) &= Skx + c \\
\left|\frac{f}{S - f}\right| &= e^{Skx+c} \\
\left|\frac{f}{S - f}\right| &= e^{c} \cdot e^{Skx} && e^{c} = |b| \\
\frac{f}{S - f} &= b \cdot e^{Skx} && b \in \mathbb{R}\text{, deswegen fallen die Betragsstriche weg.} \\
\frac{S - f}{f} &= \frac{1}{b} \cdot e^{-Skx} && a = \tfrac{1}{b} \\
\frac{S}{f} - 1 &= a \cdot e^{-Skx} \\
\frac{S}{f} &= a \cdot e^{-Skx} + 1 \\
\frac{S}{a \cdot e^{-Skx} + 1} &= f \\
f(x) &= \frac{S}{a \cdot e^{-Skx} + 1}
\end{aligned}
$$

a kann bestimmt werden mit $f(0)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{S}{f} - 1 &= a \cdot e^{-kSx} \\
\frac{S}{f(0)} - 1 &= a \cdot e^{-kS \cdot 0} \\
\frac{S}{f(0)} - 1 &= a
\end{aligned}
$$

Damit wird die endgültige Funktion zu:

$$f(x) = \frac{S}{\left(\frac{S}{f(0)} - 1\right) \cdot e^{-kSx} + 1}$$

2.4 Chemische Reaktion

Wir betrachten zuerst eine spezielle Reaktion zweier Moleküle, die miteinander zu einem neuen Produkt reagieren:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{AB}$$

Die Reaktionsgeschwindigkeit ist dann sicherlich abhängig von der Konzentration der Moleküle vom Typ A. Wenn Sie wenig Moleküle von A haben, dann haben Sie auch wenige Reaktionen. Die Reaktionsgeschwindigkeit ist gering.

Die Reaktionsgeschwindigkeit ist sicherlich auch abhängig von der Konzentration der Moleküle vom Typ B. Wenn Sie wenig Moleküle von B haben, dann haben Sie auch wenige Reaktionen. Die Reaktionsgeschwindigkeit ist auch dann gering.

Die Reaktionsgeschwindigkeit ist also proportional zu der Konzentration der Moleküle vom Typ A und vom Typ B:

$$v \sim [\mathrm{A}]$$
$$v \sim [\mathrm{B}]$$

Die eckigen Klammern um A bedeuten: die Konzentration des Stoffes A. Bei B genauso.

Dies bedeutet, dass die Reaktionsgeschwindigkeit proportional zum Produkt der Konzentrationen von A und B ist:

$$v = k[\mathrm{A}] \cdot [\mathrm{B}]$$

k ist der Proportionalitätsfaktor.

Andererseits gilt:

$$v = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

Wenn die Konzentration abnimmt (negative Steigung) ist die Reaktionsgeschwindigkeit groß und positiv. Daher kommt das Minuszeichen.

Wenn nun A und B derselbe Stoff sind:

$$A + A \rightarrow A_2$$

$$v \sim [\mathrm{A}]^2$$
$$v = k[\mathrm{A}]^2$$
$$v = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt}$$

Dies ergibt die Differenzialgleichung:

$$-\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = k[\mathrm{A}]^2$$

Zuerst werden die A's alle auf die linke Seite gebracht und das dt auf die rechte:

$$-\frac{d[\mathrm{A}]}{[\mathrm{A}]^2} = k\,dt$$

Dann wird jeweils die linke Seite integriert und die rechte:

$$\frac{1}{[\mathrm{A}]} = kt + C$$

oder aufgelöst nach der Konzentration:

$$\frac{1}{kt + C} = [\mathrm{A}]$$

Dies ist eine verschobene Hyperbel: 1/x. Sie schneidet die y-Achse bei der Anfangskonzentration: $1/C$.

2.5 Aufgaben zu Differenzialgleichungen

Aufgabe 2.1
Zeigen Sie, dass f die Differenzialgleichung erfüllt.

$$f(x) = 4\,e^{x}$$
$$f'(x) = 4f(x)$$

(Lösung siehe Seite 117).

Aufgabe 2.2
Zeigen Sie, dass f die Differenzialgleichung erfüllt.

$$f(x) = e^{4x}$$
$$f''(x) = 16f(x)$$

(Lösung siehe Seite 117).

Aufgabe 2.3
Zeigen Sie, dass f die Differenzialgleichung erfüllt.

$$f(x) = e^{-2x}$$
$$f'(x) = -2f(x)$$

(Lösung siehe Seite 117).

Aufgabe 2.4
Zeigen Sie, dass f die Differenzialgleichung erfüllt.

$$f(x) = 10 - e^{-2x}$$
$$f'(x) = 2(10 - f(x))$$

(Lösung siehe Seite 117).

Aufgabe 2.5
Zeigen Sie, dass f die Differenzialgleichung erfüllt.

$$f(x) = \frac{3}{1 + 2\,e^{-6x}}$$
$$f'(x) = 2f(x)(3 - f(x))$$

(Lösung siehe Seite 117).

2.6 Lösungen

Zu Aufgabe: 2.1

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\,e^x \\ f'(x) &= 4\,e^x \\ &= 4f(x) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 2.2

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{4x} \\ f'(x) &= 4\,e^{4x} \\ f''(x) &= 16\,e^{4x} \\ &= 16f(x) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 2.3

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x} \\ f'(x) &= -2\,e^{-2x} \\ &= -2f(x) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 2.4

$$\begin{aligned} f(x) &= 10 - e^{2x} \\ f'(x) &= -(-2)\,e^{2x} \\ &= 2\,e^{2x} \\ 2(10 - f(x)) &= 2\left(10 - (10 - e^{-2x})\right) \\ &= 2\left(10 - 10 + e^{-2x})\right) \\ &= 2\left(e^{-2x})\right) \\ &= 2\,e^{2x} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 2.5

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{1+2\,e^{-6x}} \\
&= 3 \cdot \left(1+2\,e^{-6x}\right)^{-1} \\
f'(x) &= \frac{-3\cdot(-12)\,e^{-6}}{(1+2\,e^{-6x})^2} \\
&= \frac{36\,e^{-6x}}{(1+2\,e^{-6x})^2} \\
2f(x)(3-f(x)) &= \\
&= 2\cdot\frac{3}{1+2\,e^{-6x}}\cdot\left(3-\frac{3}{1+2\,e^{-6x}}\right) \\
&= \frac{6}{1+2\,e^{-6x}}\cdot\left(\frac{3(1+2\,e^{-6x})}{1+2\,e^{-6x}}-\frac{3}{1+2\,e^{-6x}}\right) \\
&= \frac{6}{1+2\,e^{-6x}}\cdot\left(\frac{3+6\,e^{-6x}}{1+2\,e^{-6x}}-\frac{3}{1+2\,e^{-6x}}\right) \\
&= \frac{6}{1+2\,e^{-6x}}\cdot\left(\frac{3+6\,e^{-6x}-3}{1+2\,e^{-6x}}\right) \\
&= \left(\frac{36\,e^{-6x}}{1+2\,e^{-6x}}\right) \\
&= f'(x)
\end{aligned}
$$

Kapitel 3

Wachstumsprozesse

In diesem Kapitel untersuchen und vergleichen wir die verschiedenen Arten des Wachstums.

1. Exponentielles Wachstum
2. Beschränktes Wachstum
3. Logistisches Wachstum

An alle diese Wachstumsfunktionen werden verschiedene Bedingungen an ihre Steigung (1. Ableitung – Wachstum) gestellt. Darum heißen diese Funktionen Wachstumsfunktionen. Zur Herleitung aus den Differenzialgleichungen siehe Kap. 2, 2.1, 2.2 und 2.3.

3.1 BeschränktesWachstum

Bei einem beschränktes Wachstum hat das Wachstum eine Sättigung, also eine obere Schranke. Siehe Abb. 3.2.

Die obere Schranke nennt man die Kapazität S.

Die Wachstumsrate ist proportional zur Differenz zur Schranke. Also je kleiner der Abstand zur Schranke S, desto weniger wächst die Funktion. Je größer der Abstand, desto stärker wächst die Funktion. Beim negativen Wachstum, also Zerfall, fällt die Funktion zur Schranke hin.

Das beschränkte Wachstum kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$f(x) = S - a \cdot e^{-kx}, \qquad a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}_+$$

Wenn a negativ ist, dann ist die Funktion fallend. Dann „fällt der Graph auf die Schranke“.

Zur Herleitung der Funktion aus der Differenzialgleichung siehe Seite 112.

Beim beschränktem Wachstum gibt es drei Parameter: S, a und k. Die Schranke kann man manchmal erraten, dann muss man nur noch a und k bestimmen.

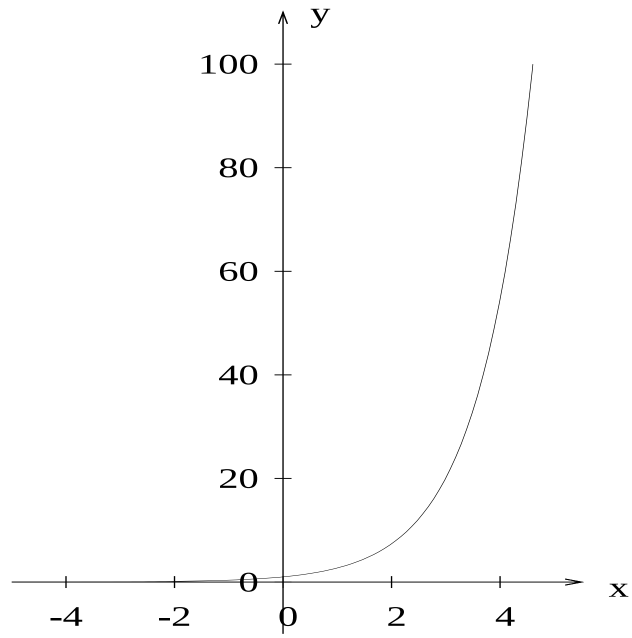


Abbildung 3.1: Exponentielles Wachstum: $f(x) = e^x$

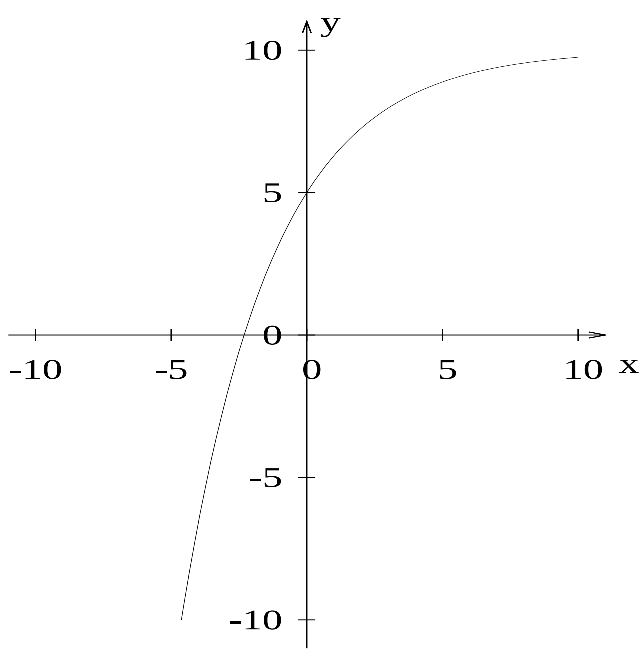


Abbildung 3.2: Beschränktes Wachstum: $f(x) = 10 - 5e^{-0,3x}$. Die obere Schranke ist bei 10.

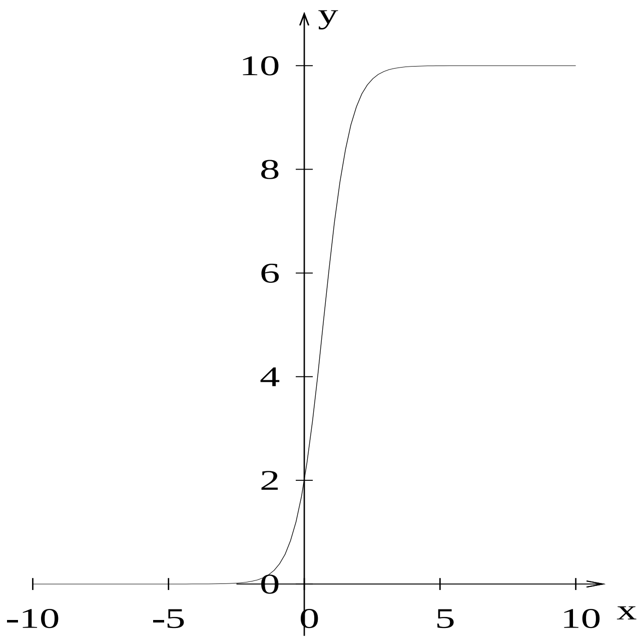


Abbildung 3.3: Logistisches Wachstum: $f(x) = \frac{2 \cdot 10}{2+(10-2)e^{-10 \cdot 0,2x}}$ oder $f(x) = \frac{20}{2+8e^{-2x}}$. Die obere Schranke ist bei 10. Die untere bei null.

Im folgenden werden zwei wesentliche Aufgabentypen mit jeweils einer Beispielaufgabe vorgestellt.

3.1.1 a und k, y-Achsenabschnitt gegeben

Beispielaufgabe:
Eine beschränkte Wachstumsfunktion geht durch die Punkte (0|2) und (3|6). Die Wachstumsgrenze liegt bei 10.

Lösung:

$$f(x) = S - a\,e^{-kx}$$

Da Ihnen der y-Achsenabschnitt gegeben ist, fangen wir damit auch an. Denn die Null ist immer etwas besonderes.

$$\begin{aligned} f(0) &= S - a\,e^{-k \cdot 0} \\ &= S - a\,e^{0} \\ &= S - a \\ 2 &= 10 - a \\ a &= 8 \end{aligned}$$

Nun muss nur noch k bestimmt werden aus dem anderen Punkt:

$$
\begin{aligned}
f(3) &= 6 & \\
6 &= 10 - 8\,e^{-3k} & | \text{ -10} \\
-4 &= -8\,e^{-3k} & | \text{ :(-8)} \\
\frac{4}{8} &= e^{-3k} & \\
0{,}5 &= e^{-3k} & | \ln \\
\ln(0{,}5) &= -3k & | \text{ :(-3)} \\
\frac{\ln(0{,}5)}{-3} &= k & \\
0{,}231 &= k &
\end{aligned}
$$

$$f(x) = 10 - 8\,e^{-0{,}231k}$$

3.1.2 a und k

Beispielaufgabe:
Eine beschränkte Wachstumsfunktion geht durch zwei beliebige Punkte (2|4) und (5|6). Die Wachstumsgrenze liegt bei 10.

Lösung:

$$f(x) = S - a\,e^{-kx}$$

Diesmal bestimmen wir zuerst das k:

Sie haben zwei Punkte, also auch zwei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 4 \\
f(5) &= 6
\end{aligned}
$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 10 - a\,e^{-2k} & = & 4 \\ 10 - a\,e^{-5k} & = & 6 \end{array} \right\}$$

Zahlen auf eine Seite bringen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6 & = & a\,e^{-2k} \\ 4 & = & a\,e^{-5k} \end{array} \right\}$$

Der einfachste Weg ist nicht etwa jetzt mit dem Logarithmus und seinen Gesetzen zu arbeiten, sondern die beiden Gleichungen durch einander zu teilen. Sie erhalten dann eine Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{4} &= \frac{e^{-2k}}{e^{-5k}} \\
\frac{3}{2} &= e^{-2k} \cdot e^{5k} \\
1{,}5 &= e^{-2k+5k} \\
1{,}5 &= e^{3k} \\
\ln(1{,}5) &= 3k \\
\frac{\ln(1{,}5)}{3} &= k \\
0{,}135 &= k
\end{aligned}$$

Jetzt ist die Funktion bis auf das a bestimmt:

$$f(x) = 10 - a\, e^{-0{,}135x}$$

Nun muss nur noch a bestimmt werden aus einem der beiden Punkte:

$$\begin{aligned}
f(2) &= 4 & & \\
4 &= 10 - a\, e^{-0{,}135 \cdot 2} & &\mid \text{-10} \\
-6 &= -a \cdot 0{,}763 & &\mid \text{:(-0,763)} \\
7{,}86 &= a & &
\end{aligned}$$

$$f(x) = 10 - 7{,}86\, e^{-0{,}135x}$$

3.1.3 Parameter

Der Einfluss der Parameter S, a und k soll in diesem Abschnitt untersucht werden.

In Abb. 3.4 - 3.6 sind Bilder zu verschiedenen a und k Werten gezeichnet.

$$f(x) = S - a\,e^{-kx}$$

1. S:
   Wenn Sie S vergrößern, dann verschieben Sie die Funktion entlang der y-Achse nach oben, wenn Sie S verkleinern, dann verschieben Sie die Funktion entlang der y-Achse nach unten.

2. k:
   Zur Erinnerung, das beschränkte Wachstum wurde durch die Differenzialgleichung definiert:

   $$f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (S - f(x))$$

   Je größer k ist, desto größer ist die Steigung, desto steiler ist das Wachstum der Funktion.

   Die Veränderung von k verändert den y-Achsenabschnitt nicht.

3. a:
   Die Veränderung von a ist am schwersten zu verstehen. Sofort einsehbar ist, dass a den y-Achsenabschnitt bestimmt.

   $$f(0) = S - a$$

   Nun untersuchen wir die Funktionsvorschrift $f(x)$. Für diese Untersuchung soll der Einfachheit gelten, dass $a > 0$ ist.

   $$\begin{aligned} f(x) &= S - a\,e^{-kx} && \mid a = e^{\ln(a)} \\ &= S - e^{\ln(a)} \cdot e^{-kx} && \mid \text{Potenzgesetz: } a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ &= S - e^{\ln(a)-kx} && \mid \text{Umstellen} \\ &= S - e^{-kx+\ln(a)} && \mid k \text{ ausklammern} \\ &= S - e^{-k\left(x+\frac{\ln(a)}{-k}\right)} && \mid -k \text{ ausklammern} \\ &= S - e^{-k\left(x-\frac{\ln(a)}{k}\right)} \end{aligned}$$

   Sie sehen, dass eine Vergrößerung von a eine Verschiebung der Funktion um $\frac{\ln(a)}{k}$ nach rechts bedeutet.

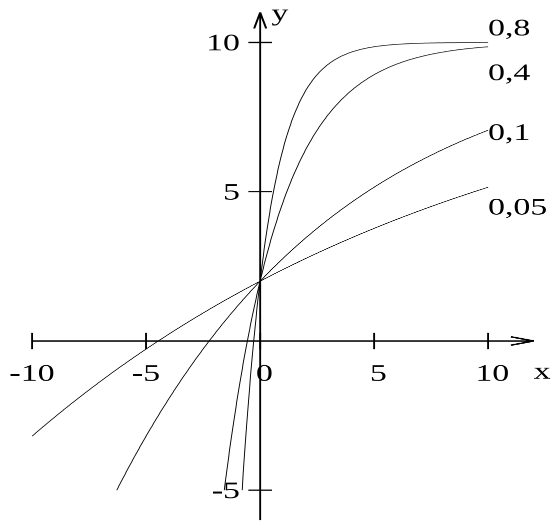


Abbildung 3.4: $S = 10$, $a = 8$, $k = 0{,}05$, $0{,}1$, $0{,}4$ und $0{,}8$. k ist an den Kurven gekennzeichnet. Je größer k ist, desto steiler ist der Graph.

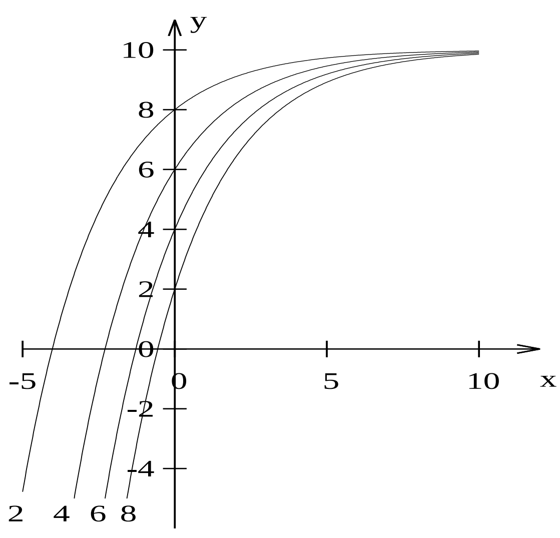


Abbildung 3.5: $S = 10$, $k = 0{,}4$, $a = 2$, 4, 6 und 8. a ist an den Kurven gekennzeichnet. Je größer a ist, desto kleiner ist der y-Achsenabschnitt.

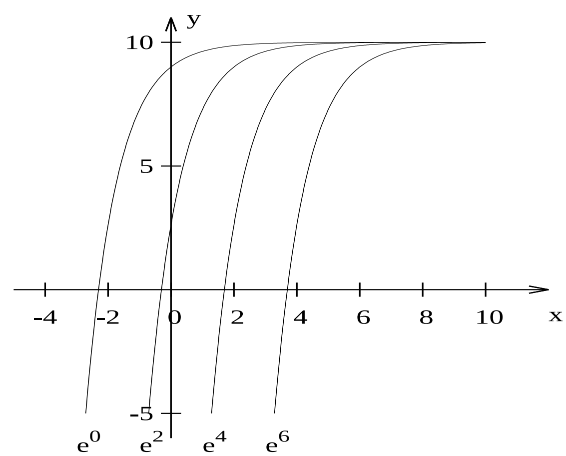


Abbildung 3.6: $S = 10$, $k = 1$, $a = e^0$, e^2, e^4, e^6. a ist an den Kurven gekennzeichnet. Es gibt eine gleichmäßige Verschiebung um 2 nach rechts.

3.2 Logistisches Wachstum

Das Logistische Wachstum beschreibt das Wachstum unter idealen Bedingungen. D. h. es gibt eine obere Grenze und eine untere Grenze. Die Funktion sieht aus wie ein liegendes „S“. Siehe Abb. 3.3. Folgende Bedingungen werden gestellt:

1. Es gibt eine obere Schranke G oder S.
2. Der Wachstum $f'(t)$ ist proportional zu:
   (a) $f(t)$
   Das heißt, die Funktion kann keine Nullstelle haben. Wäre irgendwo $y = 0$, dann wären $f'(x)$ und alle weiteren Ableitungen an der Stelle null.

   Je kleiner der y-Wert der Funktion, desto kleiner die Steigung. Die Funktion nähert sich also „nach links“ der null.

   (b) der Kapazität: $S - f(t)$.
   S ist die obere Schranke, so wie bei den Funktionen des beschränkten Wachstums. Je mehr sich die Funktion der Schranke nähert, desto weniger wächst sie, so dass sie sich asymptotisch der Schranke nähert.

$$f'(t) = k(f(t) \cdot (S - f(t)), \qquad k, S \in \mathbb{R}_+$$

Daraus ergibt sich dann die Funktion. Es gibt verschiedene Darstellungen der Funktion, die jedoch immer dasselbe bedeuten:

- $$f(t) = S \cdot \frac{1}{1 + e^{-kSt}\left(\frac{S}{f(0)} - 1\right)}$$
  S ist die obere Schranke / Grenze. $f(0)$ ist der y-Achsenabschnitt, k ist der Wachstumsfaktor.

- $$f(t) = \frac{S}{1 + \frac{S-a}{a}\, e^{-Skt}}$$
  S ist die obere Schranke / Grenze. $a = f(0)$ ist der y-Achsenabschnitt, k ist der Wachstumsfaktor.

- Oder die obige Gleichung umgeformt:
  $$f(t) = \frac{aS}{a + (S - a)\, e^{-Skt}}$$
  S ist die obere Schranke / Grenze. $a = f(0)$ ist der y-Achsenabschnitt, k ist der Wachstumsfaktor.

Zur Herleitung siehe Seite 112.

Achtung Wenn Sie unten im Nenner eine 1 stehen haben, dann steht im Zähler die Grenze S. Wenn unten eine von 1 verschiedene Zahl steht, dann steht dort das a und oben aS. Sie müssen dann erst durch a teilen, um die Grenze zu erhalten.

3.3 Wendepunkt

In diesem Abschnitt soll der Wendepunkt der logistischen Funktion berechnet werden. Dies kann auf zwei Wegen geschehen.

1. Sie benutzen die Differentialgleichung der logistischen Funktion

2. Sie berechnen von der 2. Ableitung die Nullstelle.

3.3.1 DGL

In diesem Abschnitt benutzen wir die Differenzialgleichung um den Wendepunkt zu bestimmen.

Wir werden umgekehrt zu sonst zuerst den y-Wert errechnen und dann anschließend den x-Wert bestimmen.

Die Differenzialgleichung der logistischen Funktion:

$$f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (S - f(x))$$

Diese leiten wir nun mit Hilfe der Produktregel ab:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= k \cdot f'(x) \cdot (S - f(x)) + k \cdot f(x) \cdot (-f'(x)) \\
&= k \cdot f'(x) \cdot (S - f(x)) - k \cdot f(x) f'(x) \\
&= k \cdot f'(x)(S - f(x) - f(x)) \\
&= k \cdot f'(x)(S - 2 \cdot f(x))
\end{aligned}$$

Dieses Produkt wird null, wenn einer der Faktoren null ist. Dies kann aber nicht $f'(x)$ sein.

$$\begin{aligned}
S - 2 \cdot f(x) &= 0 \\
S &= 2 \cdot f(x) \\
\frac{S}{2} &= f(x)
\end{aligned}$$

Der y-Wert des Wendepunktes ist die Hälfte von S:

$$y_W = \frac{S}{2}$$

Anschließend bestimmen wir den x-Wert aus der logistischen Funktion:

$$\begin{aligned}
f(x_w) &= \frac{S}{2} \\
\frac{S}{1+\frac{(S-a)}{a}\,e^{-Skx}} &= \frac{S}{2} \\
\frac{1}{1+\frac{(S-a)}{a}\,e^{-Skx}} &= \frac{1}{2} \\
1+\frac{(S-a)}{a}\,e^{-Skx} &= 2 \\
\frac{(S-a)}{a}\,e^{-Skx} &= 1 \\
e^{-Skx} &= \frac{a}{S-a} \\
-Skx &= \ln\left(\frac{a}{S-a}\right) \\
x &= \frac{-\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}{Sk} \\
x &= \frac{\ln\left(\frac{S-a}{a}\right)}{Sk}
\end{aligned}$$

3.3.2 Funktion

In diesem Abschnitt berechnen wir die Wendestelle aus der 2. Ableitung.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{aS}{a+(S-a)\,e^{-Skx}} \\
f'(x) &= \frac{-aS\cdot(-Sk)\cdot(S-a)\,e^{-Skx}}{\left(a+(S-a)\,e^{-Skx}\right)^2} \\
&= \frac{akS^2(S-a)\,e^{-Skx}}{\left(a+(S-a)\,e^{-Skx}\right)^2} \\
f''(x) &= \frac{S^3ak^2e^{-Skx}((S-a)e^{-Skx}-a)}{\left(a+(S-a)\,e^{-Skx}\right)^3}
\end{aligned}$$

Wenn die 2. Ableitung null sein soll, dann muss einer der Faktoren im Zähler null sein. Da gibts nur einen:

$$\begin{aligned}
(S-a)e^{-Skx}-a &= 0\\
(S-a)e^{-Skx} &= a\\
e^{-Skx} &= \frac{a}{S-a}\\
-Skx &= \ln\left(\frac{a}{S-a}\right)\\
x &= \frac{-\ln\left(\frac{a}{S-a}\right)}{Sk}
\end{aligned}$$

Nun muss man „nur“ noch das Vorzeichenkriterium anwenden und dann um den y-Wert zu berechnen das ganze in die Originalfunktion ($f(x)$) einsetzen ...

Dieser Weg ist deutlich komplizierter.

3.4 Aufgaben zum Wachstum

Aufgabe 3.1
Ein Glas Wasser kommt aus dem Kühlschrank (0°C) und steht bei Raumtemperatur (20°C) auf dem Tisch. Nach 2 Minuten messen Sie eine Wassertemperatur von 5°C.

Geben Sie eine Temperaturfunktion an.

$$f(t) = S - a\,e^{-kt}$$

(Lösung siehe Seite 132).

Aufgabe 3.2
Von einem beschränktem Wachstum mit der vermuteten Grenze 8 sind Ihnen zwei Punkte gegeben: (2|4) und (4|6). Geben Sie die dazugehörige Funktion des beschränkten Wachstums an.
(Lösung siehe Seite 133).

Aufgabe 3.3
Von einem beschränktem Wachstum mit $k = 0{,}1$ sind Ihnen zwei Punkte gegeben: (2|4) und (5|6). Geben Sie die dazugehörige Funktion des beschränkten Wachstums an.
(Lösung siehe Seite 134).

Aufgabe 3.4
Die obere Schranke einer logistischen Wachstumsfunktion sei 6. Die Funktion geht durch die Punkte (0|2) und (2|4).
Bestimmen Sie die Funktion.
(Lösung siehe Seite 134).

Aufgabe 3.5
Gegeben ist eine logistische Wachstumsfunktion:

$$f(x) = \frac{12}{1 + 3e^{-2{,}4x}}$$

Geben Sie die obere Schranke, den y-Wert zu $x = 0$ und die Differenzialgleichung an.
(Lösung siehe Seite 135).

Aufgabe 3.6
Gegeben ist eine logistische Wachstumsfunktion:

$$f(x) = \frac{10}{2 + 4e^{-0{,}5x}}$$

Geben Sie die obere Schranke, den y-Wert zu $x = 0$ und die Differenzialgleichung an.
(Lösung siehe Seite 136).

Aufgabe 3.7
Bestimmen Sie aus der Differenzialgleichung des logistischen Wachstums die 2. Ableitung in Abhängigkeit von $f(x)$.
(Lösung siehe Seite 136).

Aufgabe 3.8
Gegeben ist eine logistische Wachstumsfunktion:

$$f(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$$

Geben Sie die obere Schranke, den y-Wert zu $x = 0$ und die Differenzialgleichung an.
Bestimmen Sie darüberhinaus die Wendestelle mit Hilfe der Ableitungen.
(Lösung siehe Seite 137).

3.5 Lösungen

Zu Aufgabe: 3.1
Ein Glas Wasser kommt aus dem Kühlschrank (0°C) und steht bei Raumtemperatur (20°C) auf dem Tisch. Nach 2 Minuten messen Sie eine Wassertemperatur von 5°C.

Geben Sie eine Temperaturfunktion an.

$$f(t) = S - a\,e^{-kt}$$

Die obere Schranke der Temperatur ist die Raumtemperatur mit 20°C.

Zuerst bestimmen wir das a:

$$\begin{aligned} f(t) &= 20 - a\,e^{-kt} \\ f(0) &= 0 \\ 0 &= 20 - a\,e^{-k\cdot 0} \\ &= 20 - a\,e^{0} \\ &= 20 - a \\ a &= 20 \end{aligned}$$

$$f(t) = 20 - 20\,e^{-kt}$$

Jetzt muss noch das k bestimmt werden. Dazu benötigen wir den zweiten Punkt:

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \\ 5 &= 20 - 20\,e^{-2k} \\ -15 &= -20\,e^{-2k} \\ 15 &= 20\,e^{-2k} \\ \frac{15}{20} &= 20\,e^{-2k} \\ \ln\left(\frac{15}{20}\right) &= -2k \\ -\frac{\ln\left(\frac{15}{20}\right)}{2} &= k \\ k &= 0{,}144 \end{aligned}$$

$$f(t) = 20 - 20\,e^{-0{,}144t}$$

Zu Aufgabe: 3.2
Von einem beschränktem Wachstum mit der vermuteten Grenze 8 sind Ihnen zwei Punkte gegeben: (2|4) und (4|6). Geben Sie die dazugehörige Funktion des beschränkten Wachstums an.

Wir haben zwei Punkte und erhalten daraus ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 8 - a\,e^{-2k} & = & 4 \\ 8 - a\,e^{-4k} & = & 6 \end{array} \right\}$$

Wir bringen jetzt wie immer alle Zahlen auf eine Seite:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4 & = & a\,e^{-2k} \\ 2 & = & a\,e^{-4k} \end{array} \right\}$$

Die einfachste Art das a zu eliminieren und eine Gleichung mit einer Unbekannten (nämlich das k) zu erhalten, ist, beide Gleichungen durch einander zu teilen:

$$\begin{aligned} 2 &= e^{-2k-(-4k)} \\ 2 &= e^{-2k+4k)} \\ 2 &= e^{2k} \\ \ln(2) &= 2k \\ \frac{\ln(2)}{2} &= k \\ k &\approx 0{,}347 \end{aligned}$$

Nun können wir anschließend das a aus einer der beiden Gleichungen von oben bestimmen:

$$\begin{aligned} 4 &= a\,e^{-2\cdot 0{,}347} \\ 4 &= a \cdot 0{,}5 \\ 8 &= a \end{aligned}$$

$$f(x) = 8 - 8 \cdot e^{-0{,}347x}$$

Zu Aufgabe: 3.3
Von einem beschränktem Wachstum mit $k = 0{,}1$ sind Ihnen zwei Punkte gegeben: $(2|4)$ und $(5|6)$. Geben Sie die dazugehörige Funktion des beschränkten Wachstums an.

Wir haben zwei Punkte und erhalten daraus ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S - a\,e^{-0{,}1\cdot 2} & = & 4 \\ S - a\,e^{-0{,}1\cdot 5} & = & 6 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S - a\,e^{-0{,}2} & = & 4 \\ S - a\,e^{-0{,}5} & = & 6 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S - a \cdot 0{,}82 & = & 4 \\ S - a \cdot 0{,}61 & = & 6 \end{array} \right\}$$

Dies ist ein einfaches Gleichungssystem mit der Lösung:

$$S = 11{,}8$$
$$a = 9{,}5$$

$$f(x) = 11{,}8 - 9{,}5\,e^{-0{,}1x}$$

Zu Aufgabe: 3.4
Die obere Schranke einer logistischen Wachstumsfunktion sei 6. Die Funktion geht durch die Punkte $(0|2)$ und $(2|4)$.
Bestimmen Sie die Funktion.

Aus den Angaben weiß man sofort: $a = 2$, $S = 6$. k muss aus dem weiteren Punkt ermittelt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{S}{1 + \left(\frac{S}{a} - 1\right) e^{-Skx}} \\ 4 &= \frac{6}{1 + 2e^{-12k}} && \mid x = 2,\ S = 6,\ a = 2 \\ 1 + 2e^{-12k} &= \frac{6}{4} \\ 1 + 2e^{-12k} &= \frac{3}{2} && \mid \text{-1} \\ 2e^{-12k} &= \frac{1}{2} && \mid :2 \\ e^{-12k} &= \frac{1}{4} && \mid \ln \\ -12k &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) && \mid \ln(a : b) = \ln(a) - \ln(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-12k &= \ln(1) - \ln(4) \\
-12k &= 0 - \ln(4) \\
12k &= \ln(4) \\
k &= \frac{\ln(4)}{12} \\
k &= 0{,}12
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{6}{1 + 2e^{-0{,}72x}}$$

Zu Aufgabe: 3.5

$$f(x) = \frac{12}{1 + 3e^{-2{,}4x}}$$

Geben Sie die obere Schranke, den y-Wert zu $x = 0$ und die Differenzialgleichung an.

$$f(x) = \frac{S}{1 + \left(\frac{S}{a} - 1\right) e^{-Skx}}$$

Da im Nenner des Bruches eine 1 steht, ist im Zähler die obere Schranke gegeben. $S = 12$

$$\begin{aligned}
3 &= \frac{S}{a} - 1 \\
4 &= \frac{12}{a} \\
a &= \frac{12}{4} \\
a &= 3
\end{aligned}$$

Die Bestimmung von k erfolgt durch den Exponenten der e-Funktion:

$$\begin{aligned}
-Sk &= -2{,}4 \\
-12k &= -2{,}4 \\
k &= 0{,}2
\end{aligned}$$

1. Die obere Schranke ist 12.
2. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0|3)$.
3. Die Differenzialgleichung lautet:

$$f'(x) = 0{,}2\,(12 - f(x))\,f(x)$$

Zu Aufgabe: 3.6

$$f(x) = \frac{10}{2 + 4e^{-0{,}5x}}$$

Geben Sie die obere Schranke, den y-Wert zu $x = 0$ und die Differenzialgleichung an.

$$f(x) = \frac{aS}{a + (S - a)e^{-Skx}}$$

Da im Nenner des Bruches keine 1 steht, ist der Zähler gleich $a \cdot S$. a wird zuerst bestimmt, das ist die einzelne Zahl im Nenner: $a = 2$

Damit ergibt sich aus dem Zähler $S = 5$.

Die Bestimmung von k erfolgt durch den Exponenten der e-Funktion:

$$\begin{aligned} -Sk &= -2{,}4 \\ -5k &= -0{,}5 \\ k &= 0{,}1 \end{aligned}$$

1. Die obere Schranke ist 5.

2. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0|2)$.

3. Die Differenzialgleichung lautet:

$$f'(x) = 0{,}1\,(5 - f(x))\,f(x)$$

Zu Aufgabe: 3.7 Die Differenzialgleichung der logistischen Funktion:

$$f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (S - f(x))$$

Diese leiten wir nun mit Hilfe der Produktregel ab:

$$\begin{aligned} f''(x) &= k \cdot f'(x) \cdot (S - f(x)) + k \cdot f(x) \cdot (-f'(x)) \\ &= k \cdot f'(x) \cdot (S - f(x)) - k \cdot f(x) f'(x) \end{aligned}$$

Dann ersetzen Sie $f'(x)$ durch $k \cdot f(x) \cdot (S - f(x))$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= k \cdot (k \cdot f(x) \cdot (S - f(x))) \cdot (S - f(x)) - k \cdot f(x) \cdot (k \cdot f(x) \cdot (S - f(x))) \\ &= k^2 \cdot f(x)(S - f(x))((S - f(x)) - f(x)) \\ &= k^2 \cdot f(x)(S - f(x))(S - 2 \cdot f(x)) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 3.8

$$f(x) = \frac{2}{1+e^x}$$

Geben Sie die obere Schranke, den y-Wert zu $x = 0$ und die Differenzialgleichung an.
Bestimmen Sie darüberhinaus die Wendestelle.

$$f(x) = \frac{aS}{a + (S-a)e^{-Skx}}$$

Da im Nenner des Bruches eine 1 steht, ist $a = 1$

Damit ergibt sich aus dem Zähler $S = 2$.

Die Bestimmung von k erfolgt durch den Exponenten der e-Funktion:

$$\begin{aligned} -Sk &= -1 \\ -2k &= -1 \\ k &= 0{,}5 \end{aligned}$$

1. Die obere Schranke ist 2.

2. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0|1)$.

3. Die Differenzialgleichung lautet:

$$f'(x) = 0{,}5\,(2 - f(x))\,f(x)$$

Alternative I

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{1+e^{-x}} \\ f'(x) &= \frac{-2\cdot(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{2\,e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ f''(x) &= \frac{-2\,e^{-x}(1+e^{-x})^2 - 2\,e^{-x}\,2(1+e^{-x})(-1)e^{-x}}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \frac{-2\,e^{-x}(1+e^{-x}) - 2\,e^{-x}\,2(-1)e^{-x}}{(1+e^{-x})^3} \\ &= \frac{-2\,e^{-x} - 2\,e^{-2x} + 4\,e^{-2x}}{(1+e^{-x})^3} \\ &= \frac{-2\,e^{-x} + 2\,e^{-2x}}{(1+e^{-x})^3} \end{aligned}$$

Alternative II

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{1+e^{-x}} \\
f'(x) &= \frac{-2\cdot(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} \\
&= \frac{2\,e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\
&= \frac{2\,e^{-x}}{e^{-2x}+2\,e^{-x}+1} \\
&= \frac{2}{e^{x}(e^{-2x}+2\,e^{-x}+1)} \\
&= \frac{2}{e^{-x}+2+e^{x}} \\
f''(x) &= \frac{-2(-e^{-x}+e^{x})}{(e^{-x}+2+e^{x})^2} \\
&= \frac{-2(e^{x}-e^{-x})}{(e^{-x}+2+e^{x})^2} \\
&= \frac{-4(\sinh(x))}{(e^{-x}+2+e^{x})^2}
\end{aligned}$$

notwendige Bedingung für eine Wendestelle: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
\frac{-2\,e^{-x}+2\,e^{-2x}}{(1+e^{-x})^3} &= 0 \\
-2\,e^{-x}+2\,e^{-2x} &= 0 \\
e^{-x}+e^{-2x} &= 0 \\
e^{-x} &= -e^{-2x} \\
-x &= -2x \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Bei $x = 0$ ist eine mögliche Wendestelle.

Damit eine Wendestelle bei $x = 0$ nachgewiesen ist, muß zusätzlich noch an der Stelle $f'''(0)$ ungleich null sein. Oder wir benutzen das Vorzeichenkriterium.

Hier wenden wir das Vorzeichenkriterium an, denn die dritten Ableitung macht gerade nicht so viel Freude.

$$\begin{aligned}
f''(-1) &= 0{,}182 > 0 \\
f''(1) &= -0{,}182 < 0
\end{aligned}$$

Es liegt ein Vorzeichenwechsel von + nach - vor. Bei $x = 0$ hat $f(x)$ die größte Steigung und damit bei $(0|1)$ einen Wendepunkt.

Damit jetzt auch noch die größte „Steigung“ nachgewiesen ist, muss an der Stelle nicht nur ein Wendepunkt sein, sondern zusätzlich auch die Steigung positiv sein, sonst wäre es ja eine Abnahme:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{-2 \cdot (-e^{-0})}{(1+e^{-0})^2} \\ &= \frac{-2 \cdot (-1)}{(1+1)^2} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = 0$ befindet sich ein Wendepunkt und die Steigung ist positiv.

Kapitel 4

Integrationsverfahren

Nicht zu jeder Funktion gibt es eine Stammfunktion. Selbst, wenn es eine Stammfunktion gibt, muss man leider oft raten.

In diesem Kapitel werden Ihnen drei Verfahren dargestellt, um zu integrieren. Je nach Funktion funktioniert vielleicht das eine oder andere Verfahren:

1. Die **partielle Integration**
   Die „Umkehrung" der Produktregel.

2. Die **Substitution**
   Die „Umkehrung" der Kettenregel.

3. Die **Partialbruchzerlegung**
   Man versucht hierbei einen komplexen Bruch in zwei Brüche aufzuspalten, die man dann integrieren kann. (Umkehrung der Bruchaddition).

Der Aufbau des Kapitels ist unabhängig von den anderen Kapiteln. Das heißt für Sie, dass Sie nicht unbedingt schon alle Funktionen kennen. So könnten Sie die partielle Integration auch ohne die Kenntenis der Exponentialfunktion oder der Logarithmusfunktion erlernen. Und später die Übungsaufgaben mit der e-Funktion, bzw. dem Logarithmus lösen.

4.1 Die partielle Integration

Bei der partiellen Integration versucht man die Ableitungsregel Produktregel zur Integration auszunutzen.

Zur Erinnerung die Produktregel:

$$(u(x) \cdot g(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Diese werden wir nun umstellen und anschließend eine Seite integrieren.

$$\begin{array}{rcll} (u(x) \cdot v(x))' & = & u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) & \mid \; -u'(x) \cdot v(x) \\ (u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x) & = & u(x) \cdot v'(x) & \mid \; \text{Seiten tauschen} \\ u(x) \cdot v'(x) & = & (u(x) \cdot g(x))' - u'(x) \cdot v(x) & \end{array}$$

Jetzt werden beide Seiten integriert:

$$\begin{array}{rcl} \int u(x) \cdot v'(x)\,dx & = & \int (u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x)\,dx \\ \int u(x) \cdot v'(x)\,dx & = & \int (u(x) \cdot v(x))'\,dx - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx \\ \int u(x) \cdot v'(x)\,dx & = & u(x) \cdot v(x)\,dx - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx \end{array}$$

Was hilft uns dies bei der Integration?
Nun, dies ist eine Möglichkeit, ein Integral umzuformen. Wenn man also die Stammfunktion einer Funktion, welche ein Produkt ist, nicht finden kann, so kann man obige Beziehung benutzen. Diese Gleichung hilft einem nur, wenn man das entstehende Integral lösen kann.

Es folgen vier Beispiele. Eins leichtes mit Polynomen, ein leichtes mit der e-Funktion, ein komplexeres ohne e-Funktion und eins mit der ln-Funktion.

Allgemein kann man sagen, dass man meistens x^n als $u(x)$ wählt.

1.
$$f(x) = x \cdot (x+5)^2$$

Auch hier ist die „richtige“ Wahl der Funktionen für $u(x) = x$ und $v'(x) = (x+5)^2$ wichtig.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \frac{1}{3}(x+5)^3 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = (x+5)^2 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot (x+5)^2\,dx &= x \cdot \frac{1}{3}(x+5)^3 - \int 1 \cdot \frac{1}{3}(x+5)^3\,dx \\ &= x \cdot \frac{1}{3}(x+5)^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}(x+5)^4 \end{aligned}$$

Das Integral rechts ist lösbar, also war die Umformung hilfreich beim Integrieren.

Es gibt zwei Anmerkungen:

(a) Anmerkung: die Integration von $(x+5)^2$ funktioniert hier nur deshalb so problemlos, weil vor dem x eine 1 steht:

$$g(x) = (7x+5)^2, \qquad G(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3}(7x+5)^3$$

(b) Anmerkung: hier gilt: $F(0) \neq 0$. Bestimmte Integrale sind kein Problem, denn Sie haben ja eine Stammfunktion. Aber, wenn Sie die Stammfunktion mit einem CAS vergleichen, erhalten Sie mit dem CAS eine andere Stammfunktion, welche dann durch $(0|0)$ geht.

2.

$$f(x) = x \cdot e^x$$

Auch hier ist die „richtige" Wahl der Funktionen für $u(x) = x$ und $v'(x) = e^x$ wichtig.

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = e^x \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^x \end{array}}$$

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx$$
$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x$$
$$\int x \cdot e^x \, dx = (x+1)e^x$$

3.

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x+2}$$

Bei „geschickter" Wahl der Funktionen $u(x) = x$ und $v'(x) = \sqrt{x+2}$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = (2/3)(x+2)^{3/2} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = \sqrt{x+2} \end{array}}$$

Der „Trick“ ist, dass sich jetzt das rechte Integral berechnen lässt:

$$\int x \cdot \sqrt{x+2}\,dx = x \cdot \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \int 1 \cdot \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$\int x \cdot \sqrt{x+2}\,dx = x \cdot \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}$$
$$\int x \cdot \sqrt{x+2}\,dx = x \cdot \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+2)^{\frac{5}{2}}$$

Jetzt kann man das Integral noch weiter zusammenfassen, bis die Stammfunktion „schick“ aussieht:

$$\int x \cdot \sqrt{x+2}\,dx = \left((x+2)^{\frac{3}{2}}\right)\left(x \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{15}(x+2)^1\right)$$
$$\int x \cdot \sqrt{x+2}\,dx = \left((x+2)^{\frac{3}{2}}\right)\left(x \cdot \frac{10}{15} - \frac{4}{15}(x+2)\right)$$
$$\int x \cdot \sqrt{x+2}\,dx = \left((x+2)^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{10x - 4(x+2)}{15}\right)$$
$$\int x \cdot \sqrt{x+2}\,dx = \left((x+2)^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{6x-8}{15}\right)$$

Die Rechnung sieht ein wenig aufwändig aus, aber wenn man es ein paar mal gemacht hat ...

Vor allen Dingen ist die Rechnung hier sehr wuselig wegen der Wurzelfunktion. Da ist das kommende Beispiel schon angenehmer, wenn man den Logarithmus schon kennt.

4.
$$f(x) = \frac{x+2}{x} = (x+2) \cdot \frac{1}{x}$$

$u(x) = x$ und $v'(x) = \ln(x)$

$u(x) = x+2$	$v(x) = \ln(x)$
$u'(x) = 1$	$v'(x) = 1/x$

$$\int (x+2) \cdot \frac{1}{x}\,dx = (x+2)\ln(x) - \int \ln(x)\,dx = (x+2)\ln(x) - (x\ln(x) - x) = 2\ln(x) + x$$

4.2 Aufgaben zur partiellen Integration ohne e-Fkt

Aufgabe 4.1
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x(x+3)^2$$

(Lösung siehe Seite 145).

Aufgabe 4.2
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x(2x+3)^4$$

(Lösung siehe Seite 146).

Aufgabe 4.3
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x(-x+3)^2$$

(Lösung siehe Seite 147).

Aufgabe 4.4
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x\sqrt{x+3}$$

(Lösung siehe Seite 148).

Aufgabe 4.5
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x(-2x+3)^3$$

(Lösung siehe Seite 149).

4.3 Lösungen

Zu Aufgabe: 4.1

$$f(x) = x(x+3)^2$$

$$u(x) = 1, \qquad v'(x) = (x+3)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= x & v(x) &= \frac{1}{3}(x+3)^3 \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= (x+3)^2 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot (x+3)^2 \\
F(x) &= x \cdot \frac{1}{3}(x+3)^3 - \int 1 \cdot \frac{1}{3}(x+3)^3 \, dx \\
&= x \cdot \frac{1}{3}(x+3)^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}(x+3)^4 \\
&= \frac{1}{12}(x+3)^3(4x - (x+3)) \\
&= \frac{1}{12}(x+3)^3(3x-3)) \\
&= \frac{1}{4}(x+3)^3(x-1))
\end{aligned}$$

Bitte beachten Sie, dass $F(0) \neq 0$ gilt!

Zu Aufgabe: 4.2

$$f(x) = x(2x+3)^4$$

$$u(x) = 1, \qquad v'(x) = (2x+3)^4$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}(2x+3)^5 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = (2x+3)^4 \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot (2x+3)^4 \\
F(x) &= x \cdot \frac{1}{10}(2x+3)^5 - \int 1 \cdot \frac{1}{10}(2x+3)^5 \, dx \\
&= x \cdot \frac{1}{10}(x+3)^5 - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}(2x+3)^6 \\
&= \frac{1}{10}(2x+3)^5 \left(x - \frac{1}{12}(2x+3) \right) \\
&= \frac{1}{120}(2x+3)^5(12x - (2x+3)) \\
&= \frac{1}{120}(2x+3)^5(10x-3)
\end{aligned}$$

Bitte beachten Sie, dass $F(0) \neq 0$ gilt!

Zu Aufgabe: 4.3

$$f(x) = x(-x+3)^2$$

$$u(x) = 1, \qquad v'(x) = (-x+3)^2$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \dfrac{-1}{3}(-x+3)^3 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = (-x+3)^2 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (-x+3)^2 \\ F(x) &= x \cdot \frac{-1}{3}(-x+3)^3 - \int 1 \cdot \frac{-1}{3}(-x+3)^3 \, dx \\ &= x \cdot \frac{-1}{3}(-x+3)^3 + \int \frac{1}{3}(-x+3)^3 \, dx \\ &= x \cdot \frac{1}{3}(x+3)^3 + \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{3}(-x+3)^4 \\ &= \frac{1}{12}(x+3)^3(4x - (-x+3)) \\ &= \frac{1}{12}(x+3)^3(5x-3)) \end{aligned}$$

Bitte beachten Sie, dass $F(0) \neq 0$ gilt!

Zu Aufgabe: 4.4

$$f(x) = x\sqrt{x+3}$$

$$u(x) = 1, \qquad v'(x) = (x+3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \frac{2}{3}(x+3)\frac{3}{2} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = (x+3)^{\frac{1}{2}} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot (x+3)^2 \\
F(x) &= x \cdot \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&= x \cdot \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{5}{2}} \\
&= x \cdot \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+3)^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{2}{15}(x+3)^{\frac{3}{2}}(5x - 2(x+3)) \\
&= \frac{2}{15}(x+3)^{\frac{3}{2}}(3x - 6) \\
&= \frac{2}{5}(x+3)^{\frac{3}{2}}(x - 2)
\end{aligned}$$

Bitte beachten Sie, dass $F(0) \neq 0$ gilt!

Zu Aufgabe: 4.5

$$f(x) = x(-2x+3)^2$$

$$u(x) = 1, \qquad v'(x) = (-2x+3)^2$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{3}(-2x+3)^3 \\ u'(x) = 1 & v'(x) = (-2x+3)^2 \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot (-2x+3)^2 \\
F(x) &= x \cdot \frac{-1}{6}(-2x+3)^3 - \int 1 \cdot \frac{-1}{6}(-2x+3)^3\,dx \\
&= x \cdot \frac{-1}{6}(-2x+3)^3 - \frac{-1}{6} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{4}(-2x+3)^4 \\
&= x \cdot \frac{-1}{6}(-2x+3)^3 - \frac{1}{48}(-2x+3)^4 \\
&= x \cdot \frac{-8}{48}(-2x+3)^3 - \frac{1}{48}(-2x+3)^4 \\
&= \frac{1}{48}(-2x+3)^3(-8x-(-2x+3)) \\
&= \frac{1}{48}(-2x+3)^3(-6x-3)
\end{aligned}$$

Bitte beachten Sie, dass $F(0) \neq 0$ gilt!

4.4 Aufgaben zur partiellen Integration

Aufgabe 4.6
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = (x+2)e^x$$

(Lösung siehe Seite 152).

Aufgabe 4.7
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = (4x+2)e^{3x+5}$$

(Lösung siehe Seite 152).

Aufgabe 4.8
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = xe^{-x}$$

(Lösung siehe Seite 152).

Aufgabe 4.9
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = 4xe^{-2x}$$

(Lösung siehe Seite 153).

Aufgabe 4.10
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x^2e^x$$

(Lösung siehe Seite 153).

Aufgabe 4.11
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = (x+5)^2e^{x+3}$$

(Lösung siehe Seite 154).

Aufgabe 4.12
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = 8(3x+5)^2e^{2x+6}$$

(Lösung siehe Seite 155).

Aufgabe 4.13
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = (-x+5)^2 e^{-x}$$

(Lösung siehe Seite 156).

Aufgabe 4.14
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$

(Lösung siehe Seite 157).

Aufgabe 4.15
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x\sqrt{2x+1}$$

(Lösung siehe Seite 157).

Aufgabe 4.16
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f_a(x) = xe^{ax}$$

(Lösung siehe Seite 158).

Aufgabe 4.17
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f_a(x) = (x-a)e^{x}$$

(Lösung siehe Seite 159).

4.5 Lösungen

Zu Aufgabe: 4.6

$$f(x) = (x+2)e^x$$
$$u(x) = x+2, \qquad v'(x) = e^x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x+2 & v(x) = e^x \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int (x+2)\cdot e^x\,dx &= (x+2)\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx \\ &= (x+2)e^x - e^x \\ &= (x+1)e^x \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.7

$$f(x) = (4x+2)e^{3x+5}$$
$$u(x) = 4x+2, \qquad v'(x) = e^{3x+5}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = 4x+2 & v(x) = \frac{1}{3}e^{3x+5} \\ u'(x) = 4 & v'(x) = e^{3x+5} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int (4x+2)e^{3x+5}\,dx &= \frac{4x+2}{3}e^{3x+5} - \int \frac{4}{3}e^{3x+5}\,dx \\ &= \frac{4x+2}{3}e^{x} - \frac{4}{9}e^{3x+5} \\ &= \frac{12x+2}{9}e^{3x+5} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.8

$$f(x) = xe^{-x}$$
$$u(x) = x, \qquad v'(x) = e^{-x}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int x \cdot e^{-x}\,dx &= -x \cdot e^{-x} - \int 1 \cdot -e^{-x}\,dx \\
&= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx \\
&= -xe^{-x} - e^{-x} \\
&= (-x-1)e^{-x} \\
&= -(x+1)e^{-x}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.9

$$f(x) = 4xe^{-2x}$$

$$u(x) = x, \qquad v'(x) = 4e^{-2x}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = -2e^{-2x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = 4e^{-2x} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int x \cdot 4e^{-2x}\,dx &= -x \cdot 2e^{-2x} - \int 1 \cdot -2e^{-2x}\,dx \\
&= -2xe^{-2x} + 2\int e^{-2x}\,dx \\
&= -2xe^{-2x} - e^{-2x} \\
&= (-2x-1)e^{-2x} \\
&= -(2x+1)e^{-2x}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.10

$$f(x) = x^2 e^x$$

Hier muss man die partielle Integration zweimal durchführen.

$$u(x) = x^2, \qquad v'(x) = e^x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x^2 & v(x) = e^x \\ u'(x) = 2x & v'(x) = e^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot e^x\,dx &= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\,dx \\
&= 2xe^x - 2\int xe^x\,dx
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:
$\int xe^x\,dx$ wird bestimmt.

$$u(x) = x, \qquad v'(x) = e^x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = e^x \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int x \cdot e^x\,dx &= x \cdot e^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x\,dx \\ &= e^x(x-1)\,dx\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot e^x\,dx &= x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\,dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx \\ &= x^2e^x - 2e^x(x-1)\,dx \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2)\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.11

$$f(x) = (x+5)^2e^{x+3}$$

Hier muss man die partielle Integration zweimal durchführen.

$$u(x) = (x+5)^2, \qquad v'(x) = e^{x+3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = (x+5)^2 & v(x) = e^{x+3} \\ u'(x) = 2(x+5) & v'(x) = e^{x+3} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int (x+5)^2 \cdot e^{x+3}\,dx &= (x+5)^2 \cdot e^{x+3} - \int 2(x+5) \cdot e^{x+3}\,dx \\ &= 2(x+5)e^{x+3} - 2\int (x+5)e^{x+3}\,dx\end{aligned}$$

Nebenrechnung:
$\int (x+5)e^{x+3}\,dx$ wird bestimmt.

$$u(x) = (x+5), \qquad v'(x) = e^{x+3}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = (x+5) & v(x) = e^{x+3} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{x+3} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int (x+5) \cdot e^{x+3}\,dx &= (x+5) \cdot e^{x+3} - \int e^{x+3}\,dx \\ &= (x+5)e^{x+3} - e^{x+3}\,dx \\ &= e^{x+3}(x+4)\,dx \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \int (x+5)^2 \cdot e^{x+3}\,dx &= (x+5)^2 \cdot e^{x+3} - \int 2(x+5) \cdot e^{x+3}\,dx \\ &= (x+5)^2 e^{x+3} - 2\int (x+5)e^{x+3}\,dx \\ &= (x+5)^2 e^{x+3} - 2e^{x+3}(x+4)\,dx \\ &= e^x(x^2+8x+17) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.12

$$f(x) = 8(3x+5)^2 e^{2x+6}$$

Hier muss man die partielle Integration zweimal durchführen.

$$u(x) = (3x+5)^2, \qquad v'(x) = 8e^{2x+6}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = (3x+5)^2 & v(x) = 4e^{2x+6} \\ u'(x) = 6(3x+5) & v'(x) = 8e^{2x+6} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int 8(3x+5)^2 \cdot e^{2x+6}\,dx &= 4(3x+5)^2 \cdot e^{2x+6} - \int 24(3x+5) \cdot e^{2x+6}\,dx \\ &= 4(3x+5)^2 e^{2x+6} - 24\int (3x+5)e^{2x+6}\,dx \end{aligned}$$

Nebenrechnung:
$\int (3x+5)e^{2x+6}\,dx$ wird bestimmt.

$$u(x) = (3x+5), \qquad v'(x) = e^{2x+6}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = (3x+5) & v(x) = 0{,}5e^{2x+6} \\ u'(x) = 3 & v'(x) = e^{2x+6} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int (3x+5) \cdot e^{2x+6}\,dx &= 0{,}5(3x+5) \cdot e^{2x+6} - \int 1{,}5e^{2x+6}\,dx \\ &= 0{,}5(3x+5)e^{2x+6} - 0{,}75e^{2x+6}\,dx \\ &= e^{2x+6}(1{,}5x+1{,}75)\,dx \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \int 8(3x+5)^2 \cdot e^{2x+6}\,dx &= 4(3x+5)^2 \cdot e^{2x+6} - 24\int (3x+5) \cdot e^{2x+6}\,dx \\ &= 4(3x+5)^2e^{2x+6} - 24e^{2x+6}(1{,}5x+1{,}75) \\ &= 4(3x+5)^2e^{2x+6} - e^{2x+6}(36x+42)\,dx \\ &= e^{2x+6}(36x^2+84x+58) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.13

$$f(x) = (-x+5)^2e^{-x}$$

Hier muss man die partielle Integration zweimal durchführen.

$$u(x) = (-x+5)^2, \qquad v'(x) = e^{-x}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = (-x+5)^2 & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = -2(-x+5) & v'(x) = e^{-x} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int (-x+5)^2 \cdot e^{-x}\,dx &= -(-x+5)^2 \cdot e^{-x} - \int 2(-x+5) \cdot e^{-x}\,dx \\ &= -(x+5)^2e^{-x} - 2\int (-x+5)e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$\int (-x+5)e^{-x}\,dx$ wird bestimmt.

$$u(x) = (-x+5), \qquad v'(x) = e^{-x}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = (-x+5) & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = -1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int (-x+5)\cdot e^{-x}\,dx &= -(-x+5)\cdot e^{-x} - \int e^{-x}\,dx \\ &= -(-x+5)\cdot e^{-x} + e^{-x}\,dx \\ &= e^{-x}(x-4)\,dx\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}\int (-x+5)^2\cdot e^{-x}\,dx &= -(-x+5)^2\cdot e^{-x} - 2\int (-x+5)\cdot e^{-x}\,dx \\ &= -(-x+5)^2 e^{-x} - 2e^{-x}(x-4) \\ &= -(x^2-10x+25)^2 e^{-x} - e^{-x}(2x-8) \\ &= e^{-x}(-x^2+8x-17)\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.14

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$
$$u(x) = x, \qquad v'(x) = \sqrt{x+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = (x+1)^{1/2} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} rcl \int x\cdot\sqrt{x+1}\,dx &= x\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx \\ &= x\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} \\ &= x\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} \\ &= (x+1)^{3/2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{15}(x+1)\right) \\ &= (x+1)^{3/2}\left(\frac{6}{15}x - \frac{4}{15}\right)\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.15

$$f(x) = x\sqrt{2x+1}$$
$$u(x) = x, \qquad v'(x) = \sqrt{2x+1}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = (1/3)(2x+1)^{3/2} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = (2x+1)^{1/2} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \sqrt{2x+1}\, dx &= x \cdot \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} - \int \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\, dx \\
&= x \cdot \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}(2x+1)^{\frac{5}{2}} \\
&= x \cdot \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{15}(2x+1)^{\frac{5}{2}} \\
&= \left(\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{15}\right)(2x+1)^{3/2} \\
&= \left(\frac{5x}{15} - \frac{2x+1}{15}\right)(2x+1)^{3/2} \\
&= \frac{3x-1}{15}(2x+1)^{3/2}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.16

$$f_a(x) = xe^{ax}$$

$$u(x) = x, \qquad v'(x) = e^{ax}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = (1/a)e^{ax} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{ax} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int x \cdot e^{ax}\, dx &= x \cdot \frac{1}{a}e^{ax} - \int \frac{1}{a}e^{ax}\, dx \\
&= x \cdot \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\,\frac{1}{a}e^{ax} \\
&= x \cdot \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} \\
&= \left(x - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} \\
&= \left(\frac{ax-1}{a^2}\right)e^{ax}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.17

$$f_a(x) = (x-a)e^x$$

$$u(x) = (x-a), \qquad v'(x) = e^x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = (x-a) & v(x) = e^x \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int (x-a) \cdot e^x \, dx &= (x-a) \cdot e^x - \int e^x \, dx \\ &= (x-a) \cdot e^x - e^x \\ &= e^x(x-a-1) \end{aligned}$$

4.6 Aufgaben zur partiellen Integration mit ln

Aufgabe 4.18
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x \cdot \ln(x)$$

(Lösung siehe Seite 161).

Aufgabe 4.19
Bestimmen Sie eine Stammfunktion: (Diese Aufgabe kann man auch mit der Substitution loesen.)

$$f(x) = \ln(x) \cdot \ln(x)$$

(Lösung siehe Seite 162).

Aufgabe 4.20
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$$

(Lösung siehe Seite 162).

Aufgabe 4.21
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

(Lösung siehe Seite 163).

Aufgabe 4.22
Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

$$f(x) = x^n \cdot \ln(x) \qquad n \in \mathbb{R}, x \neq -1$$

(Lösung siehe Seite 163).

4.7 Lösungen

Zu Aufgabe: 4.18

$$f(x) = x \cdot \ln(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = x\ln(x) - x \\ u'(x) = 1 & v'(x) = \ln(x) \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln(x)\,dx &= x(x\ln(x) - x) - \int 1 \cdot x\ln(x) - x\,dx \\ &= x(x\ln(x) - x) - \int 1 \cdot x\ln(x)\,dx + \int x\,dx \\ &= x(x\ln(x) - x) - \int 1 \cdot x\ln(x)\,dx + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite wird auf beiden Seiten addiert, dann fällte es rechts weg und links ist es doppelt vorhanden:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int x \cdot \ln(x)\,dx &= x(x\ln(x) - x) + \frac{1}{2}x^2 \\ 2 \cdot \int x \cdot \ln(x)\,dx &= x^2\ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \\ 2 \cdot \int x \cdot \ln(x)\,dx &= x^2\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 \\ \int x \cdot \ln(x)\,dx &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \\ F(x) &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.19

$$f(x) = \ln(x) \cdot \ln(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x) & v(x) = x\ln(x) - x \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v'(x) = \ln(x) \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int \ln(x) \cdot \ln(x)\, dx &= \ln(x)(x\ln(x) - x) - \int \frac{1}{x} \cdot (x\ln(x) - x)\, dx \\ &= \ln(x)(x\ln(x) - x) - \int \ln(x) - 1\, dx \\ &= \ln(x)(x\ln(x) - x) - (x\ln(x) - x - x) \\ &= x(\ln(x))^2 - x\ln(x) - x\ln(x) + 2x \\ F(x) &= x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.20

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} & = v(x)\ln(x) \\ u'(x) = x^{\frac{1}{2}} & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \cdot \ln(x)\, dx &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x) - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x) - \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\, dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{6x^{\frac{3}{2}}\ln(x) - 4x^{\frac{3}{2}}}{9} \\ F(x) &= \frac{2x^{\frac{3}{2}}\,(3\ln(x) - 2)}{9} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.21

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \frac{1}{3}x^3 & = v(x)\ln(x) \\ u'(x) = x^2 & v'(x) = \frac{1}{x} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \ln(x)\,dx &= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 \\ &= \frac{3x^3\ln(x) - x^3}{9} \\ F(x) &= \frac{x^3\,(3\ln(x) - 1)}{9} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.22

$$f(x) = x^n \cdot \ln(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x) & v(x) = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} \\ u'(x) = \frac{1}{x} & = v'(x)x^n \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int x^n \cdot \ln(x)\,dx &= \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\ln(x) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\ln(x) - \int \frac{1}{n+1}x^n\,dx \\ &= \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}x^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{(n+1)^2}\,x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} \\ F(x) &= \frac{1}{(n+1)^2}\,x^{n+1}((n+1)\,\ln(x) - 1) \end{aligned}$$

4.8 Die Substitution

In manchen Fällen kann man durch Umkehrung der Kettenregel integrieren. Dies nennt man „Integration durch Substitution".

In diesem Abschnitt werden wir den Bruch $\frac{dz}{dx}$ als Ableitung der Funktion $z(x)$ ansehen. Der Kehrwert des Bruches: $\frac{dx}{dz}$ ist dann die Ableitung der Funktion $x(z)$, der Umkehrfunktion.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{5}(2x^2 + 3x)^4 \cdot (4x + 3)$$

Dies ist eine Funktion multipliziert mit der inneren Ableitung:

$$F(x) = (2x^2 + 3x)^5$$

Wie geht man nun systematisch vor?

$$f(x) = (2x + 3)^4$$

$$\int_2^5 (2x + 3)^4 \, dx$$

1. Wähle Sie einen Term als z. Die Wahl sollte so erfolgen, dass die entstandene Funktion $f(z)$ leicht integrierbar ist: $z = 2x + 3$

2. Dann muss noch dass dx durch das dz ersetzt werden. Man sagt: dx zu dz substituieren. Diese geht nicht so ganz einfach, denn z ist ja eine Funktion mit der Variablen x:

$$\begin{aligned} z &= 2x + 3 \\ z' = \frac{dz}{dx} &= 2 \\ dz &= 2\,dx \\ \frac{dz}{2} &= dx \end{aligned}$$

3. Ermitteln der neuen Grenzen

$$\begin{aligned} z(2) &= 2 \cdot 2 + 3 = 7 \\ z(5) &= 2 \cdot 5 + 3 = 13 \end{aligned}$$

4. Umschreiben zur Variablen z:

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \int_7^{13} f(z)\,dz$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^5 (2x + 3)^4\,dx = \int_7^{13} z^4 \frac{1}{2}\,dz = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} z^5\right]_7^{13} = \frac{177243}{5}$$

Das nächste Beispiel ist eine sehr einfache Funktion, um die Umrechnung der Grenzen anschaulicher zu machen. Es werden die Rechnung mit und ohne Substitution gegenüber gestellt:

$$\int_1^3 (x+1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x+1)^4\bigg|_1^3 = \frac{1}{4}\cdot 4^4 - \frac{1}{4}\cdot 2^4 = 60$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} z &= x+1 \\ z' = \frac{dz}{dx} &= 1 \\ dz &= dx \\ z(3) &= 4 \\ z(1) &= 2 \end{aligned}$$

$$\int_1^3 (x+1)^3\,dx = \int_2^4 z^3\,dx = \frac{1}{4}z^4\bigg|_2^4 = \frac{1}{4}\cdot 4^4 - \frac{1}{4}\cdot 2^4 = 60$$

Wenn Sie die Stammfunktion ermitteln möchten, müssen Sie noch „zurück substituieren“.

$$f(x) = (2x+3)^4$$

1. Wählen Sie einen Term als z. Die Wahl sollte so erfolgen, dass die entstandene Funktion $f(z)$ leicht integrierbar ist.

$$\begin{aligned} z &= 2x+3 \\ x &= \frac{z-3}{2} \end{aligned}$$

2. Dann muss noch dx zu dz substituiert werden!

$$\begin{aligned} z &= 2x+3 \\ z' = \frac{dz}{dx} &= 2 \\ dz &= 2dx \\ \frac{dz}{2} &= dx \end{aligned}$$

3. Umschreiben zur Variablen z:

$$\int f(x)\,dx = \int (2x+3)^4\,dx = \int z^4 \frac{1}{2}\,dz$$

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{10}z^5 \\ F(x) &= \frac{1}{10}(2x+3)^5 \end{aligned}$$

4.9 Aufgaben zur linearen Substitution

Aufgabe 4.23 Bestimmen Sie das Integral:

$$\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{4x+5}}\,dx$$

(Lösung siehe Seite 167).

Aufgabe 4.24 Bestimmen Sie das Integral:

$$\int_0^2 e^{2x+5}\,dx$$

(Lösung siehe Seite 167).

Aufgabe 4.25 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{x+3}{x-4}\,dx$$

(Lösung siehe Seite 168).

Aufgabe 4.26 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{6x+5}{2x+3}\,dx$$

(Lösung siehe Seite 169).

4.10 Lösungen

Zu Aufgabe: 4.23

$$\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{4x+5}}\,dx$$

$$\begin{aligned} z &= 4x+5 \\ \frac{dz}{dx} &= 4 \\ \frac{dz}{4} &= dx \\ z(3) &= 17 \\ z(5) &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{4x+5}}\,dx &= \int_{17}^{25} \frac{1}{4\sqrt{z}}\,dz \\ &= \int_{17}^{25} \frac{1}{4} z^{-\frac{1}{2}}\,dz \\ &= \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}\right]_{17}^{25} \\ &= \left[\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}}\right]_{17}^{25} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.24

$$\int_0^2 e^{2x+5}\,dx$$

$$\begin{aligned} z &= 2x+5 \\ \frac{dz}{dx} &= 2 \\ \frac{dz}{2} &= dx \\ z(2) &= 9 \\ z(0) &= 5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 e^{2x+5}\,dx &= \int_5^9 \frac{1}{2}e^z\,dz \\
&= \left[\frac{1}{2}e^z\right]_5^9 \\
&= \frac{e^9}{2} - \frac{e^5}{2}
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe: 4.25

$$f(x) = \frac{x+3}{x-4}$$

$$
\begin{aligned}
z &= x-4 \\
z+4 &= x \\
1 &= \frac{dx}{dz} \\
dz &= dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x-4}\,dx = \int \frac{z+7}{z}\,dz &= \int \frac{z}{z} + \frac{7}{z}\,dz \\
&= \int 1 + \frac{7}{z}\,dz = \int 1 + 7\cdot\frac{1}{z}\,dz = z + 7\ln(z)
\end{aligned}
$$

$$F(x) = x - 4 + 7\ln(x-4)$$

Zu Aufgabe: 4.26

$$f(x) = \frac{6x+5}{2x+3}$$

$$\begin{aligned} z &= 2x+3 \\ \frac{z-3}{2} &= x \\ \frac{dz}{dx} &= 2 \\ \frac{1}{2}\,dz &= dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{6x+5}{2x+3}\,dx &= \int \frac{1}{z}\cdot\left(6\frac{z-3}{2}+5\right)\frac{1}{2}\,dz \\ &= \int \frac{3(z-3)+5}{2z}\,dz \\ &= \int \frac{3z-9+5}{2z}\,dz \\ &= \int \frac{3z-4}{2z}\,dz \\ &= \int \frac{3z}{2z}-\frac{4}{2z}\,dz \\ &= \int \frac{3z}{2z}-\frac{2}{z}\,dz \\ &= \int \frac{3}{2}-\frac{2}{z}\,dz \\ &= \int \frac{3}{2}-2\frac{1}{z}\,dz \\ &= \frac{3}{2}z-2\ln(z) \\ F(x) &= \frac{3}{2}(2x+3)-2\ln(2x+3) \\ F(x) &= \frac{6x+9}{2}-2\ln(2x+3) \\ F(x) &= 3x+4{,}5-2\ln(2x+3) \end{aligned}$$

da aber nur eine Stammfunktion gefragt ist:

$$F(x) = 3x-2\ln(2x+3)$$

4.11 Aufgaben zur Substitution

Aufgabe 4.27 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

(Lösung siehe Seite 172).

Aufgabe 4.28 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{\ln(x)^n}{x} \qquad n \neq -1$$

(Lösung siehe Seite 172).

Aufgabe 4.29 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x) \cdot x}$$

(Lösung siehe Seite 173).

Aufgabe 4.30 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = (\ln(x))^2$$

(Lösung siehe Seite 173).

Aufgabe 4.31 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \ln(\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x}$$

(Lösung siehe Seite 174).

Aufgabe 4.32 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{(\ln(x))^4}{x}$$

$x = e^z$

(Lösung siehe Seite 177).

Aufgabe 4.33 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x(2-\ln(x))}$$

$x = e^z$

(Lösung siehe Seite 177).

Aufgabe 4.34 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+3}$$

(Lösung siehe Seite 178).

Aufgabe 4.35 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{4x + 6\sqrt{x}}$$

(Lösung siehe Seite 179).

Aufgabe 4.36 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = x \ln(x)$$

$x = e^z$

(Lösung siehe Seite 181).

Aufgabe 4.37 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = 8\sqrt{4x^2 + 1} \cdot x \, dx$$

(Lösung siehe Seite 182).

Aufgabe 4.38 Bestimmen Sie die Stammfunktion:

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \, dx$$

(Lösung siehe Seite 182).

4.12 Lösungen

Zu Aufgabe: 4.27

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} z &= 1 - x^2 \\ x &= \sqrt{1-z} \\ \frac{dz}{dx} &= -2x \\ \frac{dz}{-2x} &= dx \\ -\frac{dz}{2x} &= dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \int x \cdot \sqrt{z} - \frac{1}{2x}\,dz \\ &= \int \sqrt{1-z} \cdot \sqrt{z}\frac{-1}{2\sqrt{1-z}}\,dz \\ &= \int \frac{-1}{2}\sqrt{z}\,dz \\ &= \int \frac{-1}{2} z^{\frac{1}{2}}\,dz \\ F(z) &= \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \\ F(x) &= \frac{-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.28

$$f(x) = \frac{\ln(x)^n}{x}$$

$$\begin{aligned} z &= \ln(x) \\ x &= e^z \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{1}{x} \\ x \cdot dz &= dx \\ e^z \cdot dz &= dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(x)^n}{x}\,dx &= \int \frac{z^n}{x}\cdot x\,dz \\
&= \int z^n\,dz \\
F(z) &= \frac{1}{n+1} z^{n+1} \\
F(x) &= \frac{1}{n+1}\ln(x)^{n+1}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.29

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)\cdot x}$$

$$\begin{aligned}
z &= \ln(x) \\
x &= e^z \\
\frac{dx}{dz} &= e^z \\
dx &= e^z \cdot dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\ln(x)\cdot x}\,dx &= \int \frac{1}{ze^z}\cdot e^z\,dz \\
&= \int \frac{1}{z}\,dz \\
F(z) &= \ln(z) \\
F(x) &= \ln(\ln(x))
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.30

$$f(x) = (\ln(x))^2$$

$$\begin{aligned}
z &= \ln(x) \\
e^z &= x \\
\frac{dx}{dz} &= e^z \\
dx &= e^z\,dz
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int (\ln(x))^2 \, dx \\
&\qquad = \int z^2 e^z \, dz \\
&\qquad = z^2 e^z - \int 2z e^z \, dz \\
&\qquad = z^2 e^z - \left(2e^z - \int 2e^z \, dz\right) \\
&\qquad = z^2 e^z - 2e^z + \int 2e^z \, dz \\
&\qquad = z^2 e^z - 2z e^z + 2e^z \\
&\qquad = e^z (z^2 - 2z + 2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(z) &= e^z \left(z^2 - 2z + 2\right) \\
F(x) &= x \left((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2\right) \\
F(x) &= x \left((\ln(x))^2 - \ln(x^2) + 2\right)
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe: 4.31

$$f(x) = \ln(\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten zu Substituieren:

1. Möglichkeit

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt{x} \\
x &= z^2 \\
\frac{dx}{dz} &= 2z \\
dx &= 2z \cdot dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \ln\left(\sqrt{x}\right) \cdot \sqrt{x} &= \int \ln(z) \cdot z \cdot 2z \, dz \\
&= \int \ln(z) \cdot 2z^2 \, dz
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
u(z) 2/3z^3 & v(z) \ln(z) \\
u'(z) 2z^2 & v'(z) \dfrac{1}{z}
\end{array}
}
$$

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(\sqrt{x}\right) \cdot \sqrt{x} &= \int \ln(z) \cdot 2z^2 \, dz \\
&= 2/3z^3 \cdot \ln(z) - \int 2/3z^3 \cdot \frac{1}{z} \, dz \\
&= 2/3z^3 \cdot \ln(z) - \int 2/3z^2 \, dz \\
&= 2/3z^3 \cdot \ln(z) - 2/9z^3 \\
F(z) &= 2/3z^3 \cdot \ln(z) - 2/9z^3 \\
F(x) &= 2/3 \left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot \ln(\sqrt{x}) - 2/9 \left(\sqrt{x}\right)^3
\end{aligned}$$

mit:

$$2 \ln\left(\sqrt{(}x)\right) = \ln\left(\sqrt{(}x)^2\right) = \ln(x)$$

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}} \, (3 \, \ln(x) - 2)}{9}$$

2. Möglichkeit

$$\begin{aligned}
z &= \ln\left(\sqrt{x}\right)\\
e^{z} &= \sqrt{x}\\
e^{2z} &= x\\
\frac{dx}{dz} &= 2e^{2z}\\
dx &= 2e^{2z}\,dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x} &= \int ze^{2z}\cdot 2e^{2z}\,dz\\
&= \int ze^{2z}\cdot 2e^{2z}\,dz\\
&= \int 2ze^{3z}\,dz\\
&= 2\int ze^{3z}\,dz
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(z) = z & v(z) = 1/3e^{3z} \\ u'(z) = 1 & v'(z) = e^{3z} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x} &= 2\int ze^{3z}\,dz\\
&= \frac{2}{3}ze^{3z} - \int \frac{2}{3}e^{3z}\,dz\\
&= \frac{2}{3}ze^{3z} - \frac{2}{9}e^{3z}\\
F(z) &= \frac{2}{3}ze^{3z} - \frac{2}{9}e^{3z}\\
F(x) &= \frac{2}{3}\ln\left(\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{3} - \frac{2}{9}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{3}\\
F(x) &= \frac{1}{3}\ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{3} - \frac{2}{9}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{3}\\
F(x) &= \frac{1}{3}\ln(x)\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{3} - \frac{2}{9}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{3}\\
F(x) &= \frac{1}{3}\ln(x)\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}\cdot x^{\frac{3}{2}}\\
F(x) &= \frac{x^{\frac{3}{2}}\left(3\ln(x) - 2\right)}{9}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.32

$$f(x) = \frac{(\ln(x))^4}{x}$$

$$\begin{aligned} x &= e^z \\ \ln(x) &= z \\ \frac{dx}{dz} &= e^z \\ dx &= e^z\,dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(\ln(x))^4}{x}\,dx &= \int \frac{z^4}{e^z}e^z\,dz \\ &= \int z^4\,dz \\ &= \frac{1}{5}z^5 \\ F(x) &= \frac{1}{5}(\ln(x))^5 \end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.33

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x(2-\ln(x))}$$

$$\begin{aligned} x &= e^z \\ \ln(x) &= z \\ \frac{dx}{dz} &= e^z \\ dx &= e^z\,dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2+\ln(x)}{x(2-\ln(x))}\,dx &= \int \frac{2+z}{e^z(2-z)}e^z\,dz \\ &= \int \frac{2+z}{2-z}\,dz \end{aligned}$$

Nochmalige Substitution:

$$\begin{aligned} t &= 2-z \\ z &= 2-t \\ \frac{dt}{dz} &= -1 \\ dt &= (-1)\,dz \\ (-1)\,dt &= dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2+\ln(x)}{x(2-\ln(x))} &= \int \frac{2+z}{2-z}\,dz \\ &= \int (-1)\frac{4-t}{t}\,dt \\ &= \int \frac{t-4}{t}\,dt\end{aligned}$$

Dieses Integral wird mit der Produktregel gelöst:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(t) = t-4 & v(t) = \ln(t) \\ u'(t) = 1 & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2+\ln(x)}{x(2-\ln(x))}\,dx &= \int \frac{2+z}{2-z}\,dz \\ &= \int \frac{t-4}{t}\,dt \\ &= (t-4)\ln(t) - \int \ln(t)\,dt \\ &= (t-4)\ln(t) - (t\ln(t) - t) \\ &= (t-4)\ln(t) - t\ln(t) + t \\ &= (-4)\ln(t) + t \\ &= (-4)\ln(2-z) + 2 - z \\ &= (-4)\ln(2-\ln(x)) + 2 - \ln(x)\end{aligned}$$

Da die einfachste Stammfunktion gesucht ist:

$$F(x) = (-4)\ln(2-\ln(x)) - \ln(x)$$

Zu Aufgabe: 4.34

$$f(x) = \frac{x}{2x^2+3}$$

$$\begin{aligned} z &= x^2 \\ \frac{dz}{dx} &= 2x \\ dz &= 2x\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{2x^2+3}\,dx &= \int \frac{1}{2z+3}\frac{1}{2}\,dz\\ &= \int \frac{1}{4z+6}\,dz\end{aligned}$$

Nochmalige Substitution:

$$\begin{aligned}t &= 4z+6\\ z &= \frac{t-6}{4}\\ \frac{dt}{dz} &= 4\\ dt &= 4\,dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{2x^2+3}\,dx &= \int \frac{1}{4z+6}\,dz\\ &= \int \frac{1}{t}\frac{1}{4}\,dt\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\,dt\\ &= \frac{1}{4}\ln(t)\\ &= \frac{1}{4}\ln(4z+6)\\ &= \frac{1}{4}\ln(4x^2+6)\\ F(x) &= \frac{1}{4}\ln(4x^2+6)\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 4.35

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{4x+6\sqrt{x}}\\ z &= \sqrt{x}\\ z^2 &= x\\ 2z &= \frac{dx}{dz}\\ 2z\,dz &= dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4x+6\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{4z^2+6z}2z\,dz\\ &= \int \frac{2}{4z+6}\,dz\\ &= \int \frac{1}{2z+3}\,dz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
t &= 2z + 3 \\
\frac{dt}{dz} &= 2 \\
dt &= 2\,dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{4x + 6\sqrt{z}}\,dx &= \int \frac{1}{2z+3}\,dz \\
&= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\,\ln(t) \\
&= \frac{1}{2}\,\ln(2z+3) \\
&= \frac{1}{2}\,\ln(2\sqrt{x}+3) \\
F(x) &= \frac{1}{2} \ln\big(2\sqrt{x}+3\big)
\end{aligned}
$$

Zu Aufgabe: 4.36

$$f(x) = x\ln(x)$$

$$\begin{aligned} x &= e^z \\ \ln(x) &= z \\ \frac{dx}{dz} &= e^z \\ dx &= e^z\,dx \end{aligned}$$

$$\int x\ln(x)\,dx = \int e^z z \cdot e^z\,dz = \int e^{2z} z\,dz$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(z) = z & v(z) = \frac{1}{2}e^{2z} \\ u'(z) = 1 & v'(z) = e^{2z} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int x\ln(x), dx &= \int e^{2z} z\,dz \\ &= \frac{1}{2}e^{2z} z \int \frac{1}{2}e^{2z}\,dz \\ &= \frac{1}{2}e^{2z} - \frac{1}{4}e^{2z} \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2$$

oder:

$$F(x) = x^2\ln(\sqrt{x}) - \frac{1}{4}x^2$$

Zu Aufgabe: 4.37

$$f(x) = 8\sqrt{4x^2+1} \cdot x\,dx$$

$$\begin{aligned} z &= 4x^2+1 \\ \frac{dz}{dx} &= 8x \\ dx &= 8x\,dz \end{aligned}$$

$$\int 8\sqrt{4x^2+1} \cdot x\,dx = \int \sqrt{z}\,dz = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}(4x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

Zu Aufgabe: 4.38

$$f(x) = e^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x} \\ z^2 &= x \\ 2z &= \frac{dx}{dz} \\ 2z\,dz &= dx \end{aligned}$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^z \cdot 2z\,dz$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(z) &= 2z & v(z) &= e^z \\ u'(z) &= 2 & v'(z) &= e^z \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int e^z \cdot 2z\,dz \\ &= 2ze^z - \int 2e^z\,dz \\ &= 2ze^z - 2e^z \\ &= 2e^z(z-1) \end{aligned}$$

$$F(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$$

4.13 Partialbruchzerlegung

(Nicht mehr im Lehrplan!!!)

1. Bestimme:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-x}\,dx$$

Lösungshinweis:
$\frac{5x-3}{x^2-x} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1}$
Tip: x und $(x-1)$ sind die Nullstellen von (x^2-x). Die Werte für die Zähler ergeben sich aus einer einfachen Gleichung:

$$\frac{5x-3}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x^2-x} \quad \Rightarrow A(x-1)+Bx = 5x-3$$

$$Ax + Bx - A = 5x - 3$$

$$\Rightarrow Ax + Bx = 5x \text{ ; und} - A = -3$$

$$\Rightarrow A = 3 \text{ und } B = 2$$

2.

$$\int \frac{6x^2-x+1}{x^3-x}\;dx$$

Lösungshinweis: Suche zuerst die Nullstellen des Nenners (0, 1, -1), schreibe diese dann so auf:

$$\frac{6x^2-x+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

und bestimme dann A, B, C. Schreibe dazu die rechte Seite auf einen Bruch

$$\frac{A(x-1)(x+1) + B(x)(x+1) + C(x)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

ausmultiplizieren ergibt für den Zähler:

$$6x^2+(-1)x+1 = Ax^2-A+Bx^2+Bx+Cx^2-Cx = x^2(A+B+C)+x(B-C)+(-A)$$

$-A = 1 \;\Rightarrow\; A = -1,$
$(B-C) = -1$ und $(A+B+C) = 6 \;\Rightarrow$ B = 3, C = 4
$\frac{6x^2-x+1}{x^3-x} = \frac{-1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}$

3.

$$\int \frac{x+5}{x^2}\;dx$$

Lösungshinweis:
$\frac{x+5}{x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$
A und B ergeben sich aus dem **Koeffizientenvergleich**: A = 1, B = 5

4.
$$\int \frac{x+5}{(x-2)^2} \; dx$$

Lösungshinweis:
$\frac{x+5}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2}$
A und B ergeben sich aus dem **Koeffizientenvergleich**: A = 1, B = 7

5. Nun noch ein sehr kompliziertes Beispiel, um zu schauen, ob Du es verstanden hast:
$$\int \frac{x+1}{x(x-2)^2} \; dx$$

Lösungshinweis:
Suche zuerst die Nullstellen des Nenners: 0, und 2×2:

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Bestimme nun A, B, C: Suche den Hauptnenner:$x(x-1)^2$. Erweitern ergibt im Zähler:
$$Ax^2 - 4Ax + A + Bx^2 - 2Bx + Cx = x + 1$$
$$x^2(A+B) + x(-4A - 2B + C) + (4A) = x + 1$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt: A = 0,25
A+B = 0 $\Rightarrow$ B = -0,75
(-2A - B + C) = 1 $\Rightarrow$ C = 0,75

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{4x} + \frac{-3}{4(x-1)} + \frac{3}{4(x-1)^2}$$

6. Wenn der Zählergrad großer ist als der Nennergrad: Erst Polynomdivision!

Kapitel 5

Logarithmusfunktion

In diesem Kapitel wollen wir die Logarithmusfunktion untersuchen. Dies ist die Umkehrung der e-Funktion und von daher schon interessant, aber die Beschäftigung mit dem Logarithmus wird uns auch eine Antwort liefern auf die Frage nach der Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$. Dies versetzt uns dann in die Lage mehr Funktionen zu integrieren.

5.1 Regeln – Überblick

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, ist der Logarithmus nur für Werte größer als null definiert.

1. $\log_a$ ist der Logarithmus zur Basis a.
2. lg ist der Logarithmus zur Basis 10.
3. ln ist der Logarithmus zur Basis e.

5.1.1 Rechenregeln

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \tag{5.1}$$

$$\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b) \tag{5.2}$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a) \tag{5.3}$$

5.1.2 Beweise mit Hilfe der Differentialrechnung

Man kann die Logarithmusregeln elementar mit Hilfe der Potenzgesetze beweisen (siehe E-script). Hier sollen nun alternative Beweise gezeigt werden mit Hilfe der Differentialrechnung.

1. Zu Zeigen:
$$\ln(a \cdot x) = \ln(a) + \ln(x) \qquad a \in \mathbb{R}$$
Wir untersuchen dazu die Funktion:
$$f(x) = \ln(ax) \text{ und } g(x) = \ln(x)$$
Deren Ableitungen sind gleich:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} \\ g'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$
Wenn deren Ableitungen gleich sind, können sich die Funktionen g und f nur um eine Konstante c unterscheiden:
$$f(x) = g(x) + c$$
Um diese Konstante zu bestimmen setzen wir für x 1 ein.
$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) + c \\ \ln(a) &= \ln(1) + c \\ \ln(a) &= 0 + c \\ \ln(a) &= c \end{aligned}$$
Damit gilt:
$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a)$$

2. Zu Zeigen:
$$\ln(x^b) = b \cdot \ln(x)$$
Wir untersuchen dazu die Funktion:
$$f(x) = \ln(x^a) \text{ und } g(x) = \ln(x)$$
Deren Ableitungen:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a \cdot x^{a-1}}{x^a} = \frac{a}{x} \\ g'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$
Wir bestimmen einen Zusammenhang für die Steigungen und integrieren beide Seiten:
$$\begin{aligned} f'(x) &= a \cdot g'(x) \\ f(x) &= a \cdot g(x) + c \end{aligned}$$

Die Konstante c lässt sich bestimmen durch einsetzen der 1:

$$\begin{aligned} f(1) &= \ln(1^a) = \ln(1) = 0 \\ g(1) &= \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Da beide Funktion bei $x = 1$ denselben y-Wert haben, ist $c = 0$.

$$\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$$

5.1.3 Spezielle Werte des Logarithmus

$$\begin{aligned} \log(1) &= 0 \\ \log(0) &= -\infty \\ \ln(e) &= 1 \\ \log_a(a) &= 1 \end{aligned}$$

5.2 Ableitung

In diesem Abschnitt wird die Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ untersucht. Wir werden sehen, dass gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis schließt endlich die Lücke der Integrationsregel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n & n &\neq -1 \\ F(x) &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

Bei beiden Beweisen zeigt es sich, dass man mit dem Bruch aus dem Steigungsdreieck: $\frac{dy}{dx}$ eben wie mit einem Bruch umgehen kann. Das bedeutet vor allen Dingen, dass man den Kehrwert bilden kann. Das ist erstmal ja so nicht selbstverständlich. Denn man bildet schließlich einen Grenzwert. Aber diese Erkenntnis wird eigentlich verschwiegen und nur benutzt.

5.2.1 Ableiten mit Hilfe der Umkehrfunktion

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Ableitung von $\ln(x)$ mit Hilfe der Umkehrfunktion: e^x. Denn die Ableitung von e^x kennen wir schon. In Abb. 5.2 ist die

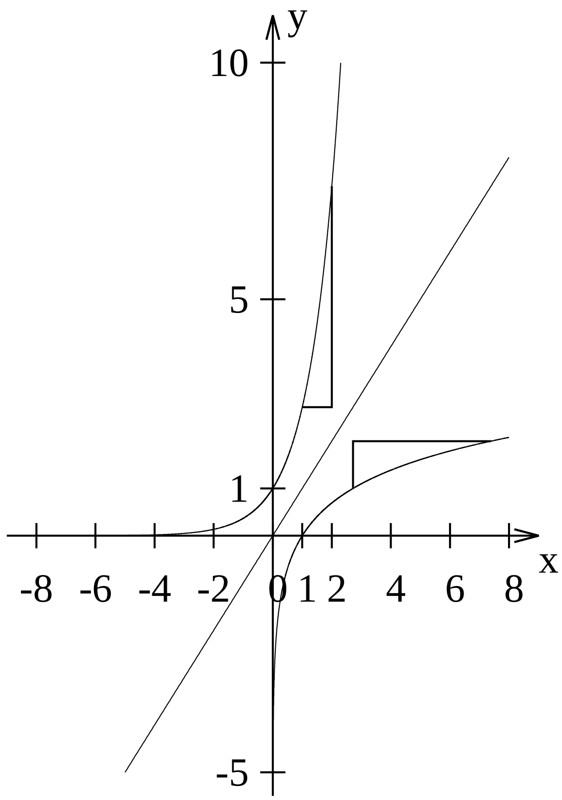


Abbildung 5.1:
In dem Bild sind die Graphen der Funktionen $\ln(x)$, e^x und x zu sehen. Da $\ln(x)$ die Umkehrfunktion zu e^x ist, ist der Graph von $\ln(x)$ der an der Ursprungsgerade gespiegelte Graph von e^x.

e-Funktion und ihre Umkehrfunktion $\ln(x)$ gezeichnet. Der Graph der Umkehrfunktion von e^x ergibt sich, wenn man den Graphen von e^x an der Ursprungsgeraden ($h(x) = x$) spiegelt. (Und umgekehrt.)

Wir untersuchen:

$$f(x) = \ln(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \\ y &= \ln(x) \\ x &= e^y \end{aligned}$$

Wir kennen die Ableitung der Umkehrfunktion. Dies wollen wir uns nun zunutze machen. Die Umkehrfunktion ist eine Funktion namens x mit der Variablen y.

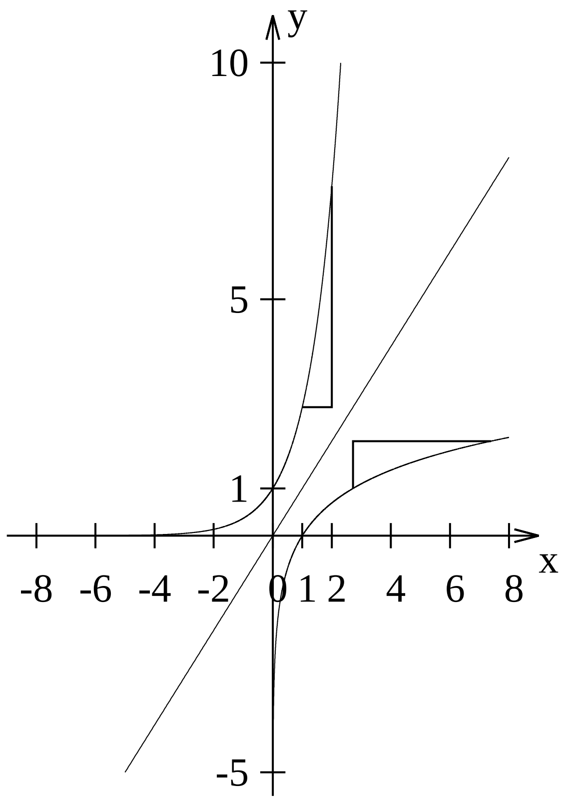


Abbildung 5.2:
In dem Bild sind die Graphen der Funktionen $\ln(x)$, e^x und die Ursprungsgerade x, an der gespiegelt wird, zu sehen. Die Steigungsdreiecke sind auch gespiegelt.

Also müssen wir auch nach y ableiten.

$$x(y) = e^y \tag{5.4}$$
$$x(y)' = e^y$$
$$\frac{dx}{dy} = e^y \tag{5.5}$$

Ableiten heißt, das Steigungsdreieck immer kleiner machen und dann den Grenzwert zu betrachten. Beim Steigungsdreieck steht im Zähler die Differenz der Funktionswerte, in diesem Fall Δx, weil die Funktion so heißt. Im Nenner steht die Differenz der Variablenwerte, das ist in unserem Fall aber dann Δy, weil die Variable ja y ist.

Warum muss das so komisch sein?
Naja, wir untersuchen ja $y = \ln(x)$. Und da ist alles wie gewohnt. Die Variable

ist x, die Funktionswerte sind die y-Werte. Aber bei der Umkehrfunktion ist eben alles vertauscht. Und das brauchen wir aber auch leider.

Jetzt bestimmen wir die Ableitung von $\ln(x)$: Dazu aber benötigen wir einen Trick aus der Bruchrechnung:

$$\begin{aligned}(\ln(x))' &= \frac{dy}{dx} \\ &= 1 \cdot \frac{dy}{dx} && \text{Bruchrechnung} \\ &= 1 : \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\end{aligned}$$

Die erste Zeile bedeutet den Grenzwert der Steigungsdreiecke zu bilden. Um zu glauben, dass der Rest der Umformungen stimmt, reicht es von unten nach oben die Gleichheitszeichen zu überprüfen.

$\frac{dx}{dy}$ kennen wir schon. Siehe Gleichung 5.5. Also mit $y = \ln(x)$ gilt:

$$\begin{aligned}(\ln(x))' &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ &= \frac{1}{e^y}\end{aligned}$$

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, was e^y denn nun ist. Das wissen wir auch schon aus der Gleichung 5.4.

$$\begin{aligned}(\ln(x))' &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\ &= \frac{1}{e^y} \\ &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Bisher haben wir stillschweigend die Schwierigkeiten des Logarithmus umgangen: $\ln(x), x > 0$. Also in Kurzform zum Merken:

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Wenn wir nun das Differenzieren umkehren, und das Integral von $1/x$ bilden wollen, dann gibt es ein Problem. Denn die Funktion $1/x$ hat auch einen negativen Ast. Man darf auch negative Werte für x einsetzen. Die Lösung ist, dass man Betragsstriche setzen muss:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ F(x) &= \ln(|x|) \end{aligned}}$$

5.2.2 Integrieren von $\frac{1}{x}$

Hier lösen wir das Integral durch Substitution und erhalten $\ln(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} x &= e^z \\ z &= \ln(x) \\ \frac{dx}{dz} &= e^z \\ dx &= e^z\,dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{x}\,dx \\ &\qquad = \int \frac{1}{e^z} e^z\,dz \\ &\qquad = \int 1\,dz \\ &\qquad = z \\ &\qquad = \ln(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ F(x) &= \ln(|x|) \end{aligned}$$

5.3 Besonderheiten

In diesem Abschnitt schauen wir kurz auf die Besonderheiten beim Rechnen mit dem Logarithmus. Wenn Sie Logarithmusfunktionen mit den Logarithmusrechenregeln umformen, dann erhalten Sie deutlich einfachere Funktionen zum Untersuchen und Ableiten.

5.3.1 Der Definitionsbereich

$$f(x) = \ln(x), \qquad x > 0$$

Dies ist so erstmal klar, wird aber unangenehm, wenn im Logarithmus noch eine Funktion steht. Zum Beispiel:

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$$

Welche Werte darf x annehmen?

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

$x^2 - 1$ ist also in drei Teile geteilt. Welche Abschnitte sind negativ?

Durch Ausprobieren oder Zeichnen oder gutes Überlegen

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 1 \\ g(-2) &= 3 \\ g(0) &= -1 \\ g(2) &= 3 \end{aligned}$$

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right), \qquad \mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ oder } x > 1\}$$

5.3.2 Rechenregel: Potenzen

Ganz oft erweist es sich, dass man komplizierte Funktionen deutlich vereinfachen kann. Zum Beispiel:

$$f(x) = \ln(x^2) = 2 \cdot \ln(x)$$

Es macht nun einen Unterschied, ob Sie die rechte oder die linke Funktion ableiten. Links müssen Sie die Kettenregel anwenden. Rechts ist die Ableitung trivial:

Links:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

Rechts:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

Speziell gilt:

$$\ln\left(\frac{1}{x+2}\right) = \ln\left((x+2)^{-1}\right) = (-1)\cdot\ln(x+2)$$

Auch diese Funktion lässt sich nach der Umformung deutlich leichter ableiten bzw. untersuchen.

Wenn Sie den Kehrwert des Argumentes des Logarithmuses bilden wird der Logarithmus negativ:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

5.3.3 Rechenregel: Multiplikation

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left((x^2)\cdot(x+1)^3\right) \\ &= \ln\left(x^2\right) + \ln\left((x+1)^3\right) \\ &= 2\ \ln(x) + 3\ \ln(x+1) \\ f'(x) &= \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} \end{aligned}$$

Wenn Sie dies mit der Produktregel rechnen, benötigen Sie mehr Papier.

5.3.4 Rechenregel: Division

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= \ln\left((x+1)\cdot\frac{1}{x-1}\right) \\ &= \ln(x+1) + \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ &= \ln(x+1) - \ln(x-1) \\ f'(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{x-1-(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x-1-x-1}{x^2-1} \\ &= \frac{-2}{x^2-1} \end{aligned}$$

5.3.5 Symmetrieuntersuchungen

Wenn Sie die Symmetrie (Achsensymmetrie, Punktsymmetrie oder keins von beiden) bestimmen, haben Sie immer $f(-x)$ gebildet und die Gleichheit zu $f(x)$ (Achsensymmetrie) bzw. zu $-f(x)$ (Punktsymmetrie) untersucht. An einem Beispiel wird die Symmetrie einer Logarithmusfunktion untersucht. Dabei benutzen Sie das Potenzgesetz:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Ein erstes Einsetzen, um schon mal eine Ahnung zu erhalten, ob und welche Symmetrie vorliegt ergibt:

$$f(3) = 0{,}693$$
$$f(-3) = -0{,}693$$

Eine Achsensymmetrie können Sie ausschließen. Es liegt also entweder eine Punktsymmetrie oder keins von beiden vor. Zur Punktsymmetrie müssen Sie zeigen:

$$f(x) = -f(-x)$$

Der Einfachheit untersuchen wir zuerst $f(-x)$ und „ergänzen“ dann später in einem zweiten Schritt das Minuszeichen.

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$$

Um zu einer Gleichheit mit $f(x)$ zu gelangen, muss vor den x jeweils ein positives Vorzeichen stehen. Also klammern Sie (-1) aus im Zähler und im Nenner:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(-1)(x-1)}{(-1)(x+1)}\right) \qquad\qquad = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

Danach können Sie die (-1) aus dem Zähler und Nenner kürzen.

Jetzt stimmt die Funktion schon mit $f(x)$ fast überein. Nur der Zähler und der Nenner müssen noch getauscht werden. Wir untersuchen ja aber auch noch nicht die ganz richtige Funktion:

$$\begin{aligned} -f(-x) &= -\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \ln\left(\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^{-1}\right) \end{aligned}$$

Das Minuszeichen vor dem Logarithmus löst sich durch den Kehrwert des Bruches, also des Argumentes des Logarithmus auf.

$$\begin{aligned}
-f(-x) &= -\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) \\
&= -\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\
&= \ln\left(\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^{-1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

5.4 Kurvendiskussion

Untersuchen Sie die Funktionen nach folgenden Gesichtspunkten:

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich.
   Untersuchen Sie eventl. Definitionslücken.

2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

3. Bestimmen Sie ob und welche Symmetrie vorliegt.

4. Bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen, bzw an den Definitionsrändern.

5. Bestimmen Sie die Ableitungen und die Stammfunktion.

6. Bestimmen Sie die Extrempunkte.

7. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten des Graphen.

8. Bestimmen Sie die Wendepunkte.

9. Skizzieren Sie den Graphen anhand Ihrer Ergebnisse.
   Skizzieren Sie bitte erst auf dem Papier bevor Sie kontrollieren.

5.5 Kurvendiskussionen – Drill

Aufgabe 5.1

$$f(x) = x \cdot \ln(x)$$

(Lösung siehe Seite 199).

Aufgabe 5.2

$$f(x) = \ln(x^2)$$

(Lösung siehe Seite 203).

Aufgabe 5.3

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

(Lösung siehe Seite 207).

Aufgabe 5.4

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$$

(Lösung siehe Seite 212).

Aufgabe 5.5

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

(Lösung siehe Seite 217).

Aufgabe 5.6

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

(Lösung siehe Seite 223).

5.6 Lösungen zu den Aufgaben

Zu Aufgabe: 69

$$f(x) = x \cdot \ln(x)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

Sie dürfen keine negativen Werte in die Logarithmusfunktion einsetzen. Null dürfen Sie auch nicht einsetzen, schließlich kann die e-Funktion ja auch nicht null werden..

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Da die Null nicht eingesetzt werden darf, gibt es auch keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x\ \ln(x) &= 0 \quad | \ln(1) = 0, \text{ der erste Faktor kann nicht null werden, da } x > 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: existiert nicht.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: (1|0).

3. **Symmetrie** $f(-x)$ darf nicht eingesetzt werden.

Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x \to \infty} x\ \ln(x) = \infty$$

Denn $\ln(x)$ wird immer größer und x wird ebenfalls immer größer für größer werdende x-Werte.

$$\lim_{x \to 0} x\ \ln(x) = 0$$

e^x geht schneller gegen null als jede Potenzfunktion. Also geht $\ln(x)$ langsamer gegen minus unendlich als x gegen null, wenn x gegen null strebt.

5. **Ableitungen**

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ \ln(x) \\ f'(x) &= \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \\ f''(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ f'''(x) &= -x^{-2} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

Die Stammfunktion kann man mit Hilfe der partiellen Integration erhalten:

$$u(x) = \ln(x), \qquad v'(x) = x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x) & v(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v'(x) = x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int x\ \ln(x)\, dx &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2\, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x\, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 \\ &= \frac{2}{4}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 \\ &= \frac{1}{4}x^2(2\ln(x) - 1) \end{aligned}$$

6. **Extrempunkt**

(a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \ln(x) + 1 &= 0 \\ \ln(x) &= -1 \\ x &= e^{-1} \\ x &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Bei $x = \frac{1}{e}$ ist eine mögliche Extremstelle.

(b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

$$f'(\frac{1}{e}) = 0 \text{ und } f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0$$

(c) **Punkt**

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln(e^{-1}) = \frac{1}{e} \cdot (-1)\ln(e) = \frac{1}{e} \cdot (-1) \cdot 1 = -\frac{1}{e}$$

Es gibt ein Minimum bei $\left(\frac{1}{e}\middle| -\frac{1}{e}\right)$.

7. **Wendepunkt**
notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{-1}{x^2} &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung. Daher gibt es keine Wendestelle.

8. **Bild**

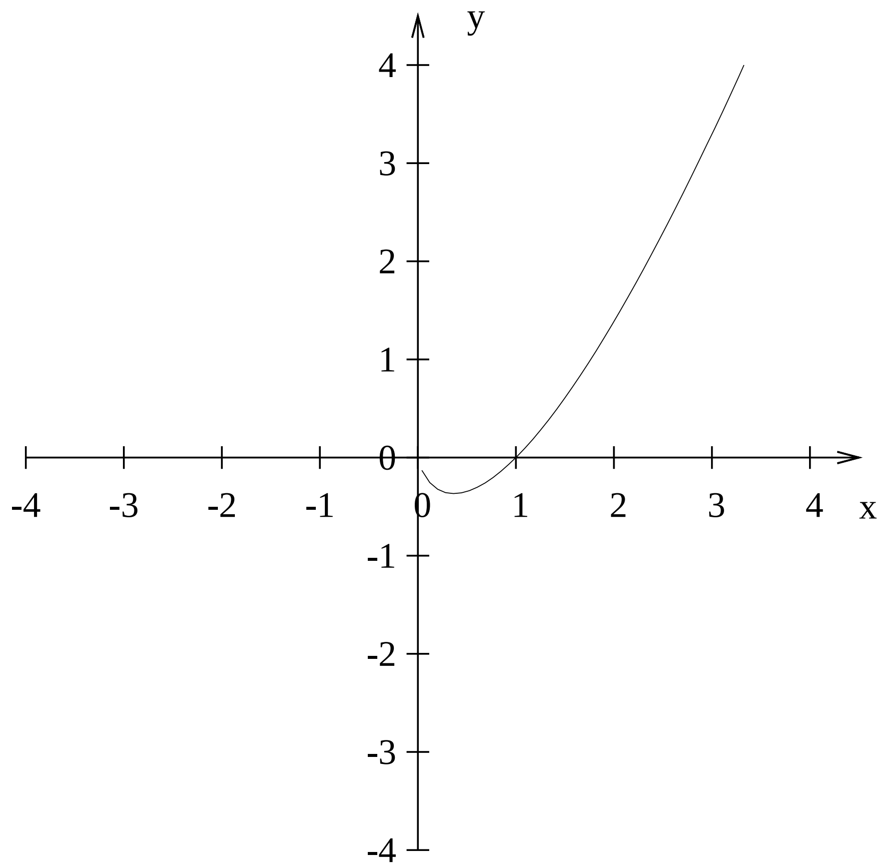


Abbildung 5.3: $f(x) = x\ln(x)$

Zu Aufgabe: 70

$$f(x) = \ln(x^2)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$$

Sie dürfen negativen Werte in die Logarithmusfunktion einsetzen, da die Werte quadratiert werden. Null dürfen Sie nicht einsetzen, schließlich kann die e-Funktion ja auch nicht null werden..

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Da die Null nicht eingesetzt werden darf, gibt es auch keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x\ \ln(x) &= 0 \quad | \ln(1) = 0,\ \text{der erste Faktor kann nicht null werden, da } x > 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: existiert nicht.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: (1|0).

3. **Symmetrie**

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left((-x)^2\right) \\ &= \ln\left(x^2\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Es liegt eine Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

4. **Verhalten an den Definitionsrändern**
Da die Funktion achsensymmetrisch ist, reicht es zu untersuchen, was passiert, wenn x gegen unendlich geht, bzw. gegen 0 geht.

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x^2) = \infty$$

Denn $\ln(x)$ wird immer größer für größer werdende x-Werte.

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2) = \infty$$

Denn $\ln(x)$ wird immer größer für größer werdende x-Werte.

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

5. **Ableitungen**

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2) = 2\ln(|x|) \\ f'(x) &= \frac{2}{x} = 2x^{-1} \\ f''(x) &= (-2)x^{-2} = \frac{-2}{x^2} \\ f'''(x) &= 4x^{-3} = \frac{4}{x^3} \end{aligned}$$

Die Stammfunktion kann man mit Hilfe der partiellen Integration erhalten:

$$u(x) = 2\ \ln(x), \qquad v'(x) = x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x) & v(x) = 2x \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v'(x) = 2 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \int 2\ \ln(x)\,dx &= 2x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot 2x\,dx \\ &= 2x \cdot \ln(x) - \int 2\,dx \\ &= 2x \cdot \ln(x) - 2x \\ &= 2x(\ln(x) - 1) \\ &= x\left(\ln\left(x^2\right) - 2\right) \end{aligned}$$

6. **Extremstellen**
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{2}{x} &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, daher gibt es keine Extremstelle.

Da $\frac{2}{x} < 0$ für negative x-Werte, ist für negative x-Werte die Funktion streng monoton fallend.

Da $\frac{2}{x} > 0$ für positive x-Werte, ist für positive x-Werte die Funktion streng monoton steigend.

7. **Wendestellen**
   notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{-2}{x^2} &= 0 \end{aligned}$$

Auch diese Gleichung hat keine Lösung. Daher gibt es auch keine Wendestelle.

8. **Bild**

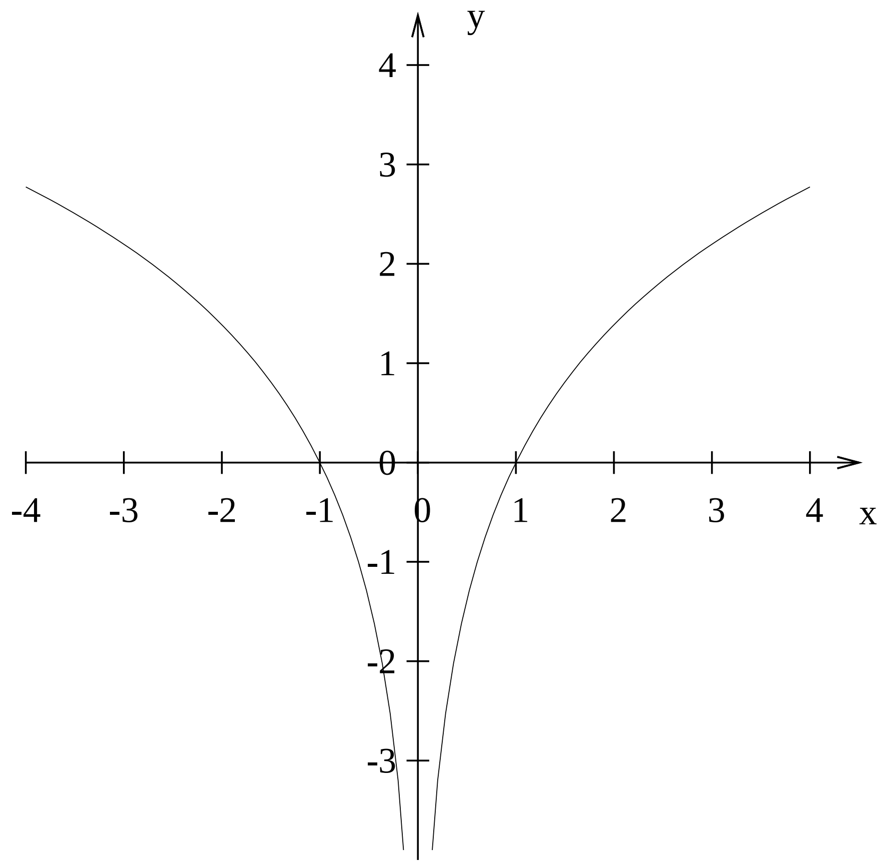


Abbildung 5.4: $f(x) = \ln(x^2) = 2\ln(|x|)$

Zu Aufgabe: 71

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

Sie dürfen keine negativen Werte in die Logarithmusfunktion einsetzen. Null dürfen Sie auch nicht einsetzen, schließlich kann die e-Funktion ja auch nicht null werden..

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Da die Null nicht eingesetzt werden darf, gibt es auch keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 0 & \\ x^2 \ln(x) & = & 0 & | \quad \ln(1) = 0 \\ x^2 & = & 1 & | \quad 0 \notin \mathbb{D} \end{array}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: existiert nicht.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: $(1|0)$.

3. **Symmetrie** $f(-x)$ darf nicht eingesetzt werden.

Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \ln(x) = \infty$$

Denn $\ln(x)$ wird immer größer und x wird ebenfalls immer größer für größer werdende x-Werte.

$$\lim_{x \to 0} x^2 \ln(x) = 0$$

e^x geht schneller gegen null als jede Potenzfunktion. Also geht $\ln(x)$ langsamer gegen minus unendlich als x gegen null, wenn x gegen null strebt.

5. **Ableitungen**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\ \ln(x) \\
f'(x) &= 2x\ \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\
&= 2x\ \ln(x) + x \\
f''(x) &= 2\ \ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 \\
&= 2\ \ln(x) + 2 + 1 \\
&= 2\ \ln(x) + 3 \\
f'''(x) &= \frac{2}{x}
\end{aligned}
$$

Die Stammfunktion kann man mit Hilfe der partiellen Integration erhalten:

$$
u(x) = \ln(x), \qquad v'(x) = x^2
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
u(x) = \ln(x) & v(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \\
u'(x) = \dfrac{1}{x} & v'(x) = x^2
\end{array}
}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^2\ \ln(x)\, dx &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}x^3\, dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2\, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 \\
&= \frac{2}{4}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 \\
&= \frac{1}{4}x^2(2\ln(x) - 1)
\end{aligned}
$$

6. **Extrempunkt**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x\ \ln(x) + x &= 0 \\ x(2\ \ln(x) + 1) &= 0, \qquad 0 \notin \mathbb{D} \\ \ln(x) &= -\frac{1}{2} \\ x &= e^{-\frac{1}{2}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{e}} \\ x &\approx 0{,}6 \end{aligned}$$

   Bei $x = 0{,}6$ ist eine mögliche Extremstelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

   $$f'(0{,}6 = 0 \text{ und } f''\left(e^{\frac{-1}{2}}\right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} + 3 = 2 > 0$$

   (c) **Punkt**

   $$\begin{aligned} f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) &= e^{-1} \cdot \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{e} \cdot \frac{-1}{2} \\ &= \frac{-1}{2e} \\ &\approx 0{,}18 \end{aligned}$$

   Es gibt ein Minimum bei $\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \middle| \frac{-1}{2e}\right)$.

7. **Wendepunkt**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f''(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2\ \ln(x) + 3 &= 0 \\ \ln(x) &= \frac{-3}{2} \\ x &= e^{\frac{-3}{2}} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{e^3}} \end{aligned}$$

   Bei $x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ ist eine mögliche Wendestelle.

(b) **hinreichende Bedingung:** $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$

$$f''(\frac{1}{\sqrt{e^3}} = 0 \text{ und } f'''\left(e^{\frac{-3}{2}}\right) = \frac{2}{e^{\frac{-3}{2}}} = 2\,e^{\frac{3}{2}} > 0$$

(c) **Punkt**

$$f\left(e^{\frac{-3}{2}}\right) = e^{-3}\,\ln\left(e^{\frac{-3}{2}}\right) = e^{-3}\,\frac{-3}{2}$$

Es gibt eine Wendestelle bei $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}} \middle| \frac{-3}{2}\,e^{-3}\right)$.

8. **Bild**

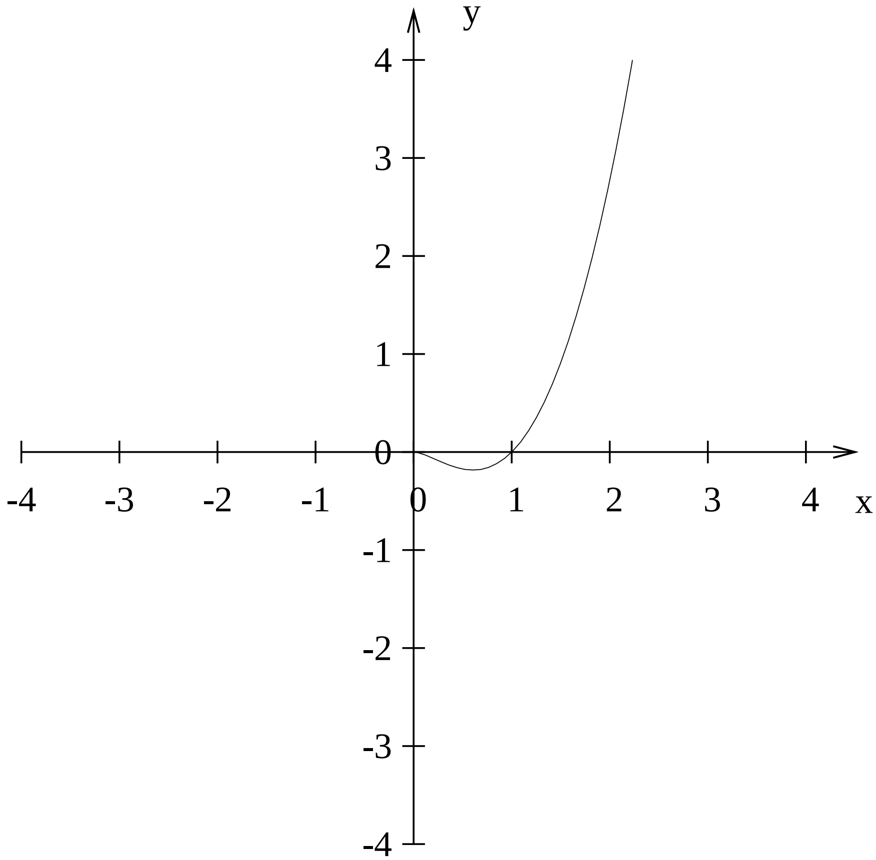


Abbildung 5.5: $f(x) = x^2 \ln(x)$

Zu Aufgabe: 72

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(x)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

   Sie dürfen keine negativen Werte in die Logarithmusfunktion einsetzen. Null dürfen Sie auch nicht einsetzen, schließlich kann die e-Funktion ja auch nicht null werden..

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Da die Null nicht eingesetzt werden darf, gibt es auch keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \sqrt{x}\,\ln(x) &= 0 \quad | \ln(1) = 0, \text{ der erste Faktor kann nicht null werden, da } x > 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: existiert nicht.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: (1|0).

3. **Symmetrie** $f(-x)$ darf nicht eingesetzt werden.

   Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\,\ln(x) = \infty$$

   Denn $\ln(x)$ wird immer größer und x wird ebenfalls immer größer für größer werdende x-Werte.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\,\ln(x) = 0$$

   e^x geht schneller gegen null als jede Potenzfunktion. Also geht $\ln(x)$ langsamer gegen minus unendlich als x gegen null, wenn x gegen null strebt.

5. **Ableitungen**

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x}\,\ln(x)\\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln(x) + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln(x) + \frac{2}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x} - (\ln(x)+2)\,\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x}\\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - (\ln(x)+2)\,\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} \qquad \text{Teilen durch einen Bruch}\\
&= \frac{2-(\ln(x)+2)}{4x\sqrt{x}}\\
&= \frac{-\ln(x)}{4x\sqrt{x}}\\
&= \frac{-\ln(x)}{4x^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \frac{\frac{-1}{x}\,4x\sqrt{x} - (-\ln(x))4\cdot\frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}}{16x^2\cdot x}\\
&= \frac{-4\sqrt{x} + \ln(x)\,6\sqrt{x}}{16x^3}\\
&= \frac{2\sqrt{x}\,(-2+\ln(x)\,3)}{16x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}\\
&= \frac{-2+3\,\ln(x)}{8x^2\cdot\sqrt{x}}\\
&= \frac{3\,\ln(x)-2}{8x^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion kann man mit Hilfe der partiellen Integration erhalten:

$$u(x) = \ln(x), \qquad v'(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x) & v(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ u'(x) = \frac{1}{x} & v'(x) = x \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx &= \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(x) - \int \frac{2}{3}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(x) - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(x) - \frac{4}{9}\,x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{6}{9}\,x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln(x) - \frac{4}{9}\,x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{9}\,x^{\frac{3}{2}}(3\,\ln(x) - 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{2}{9}\,x^{\frac{3}{2}}(3\,\ln(x) - 2) \\
f(x) &= \sqrt{x}\,\ln(x) \\
f'(x) &= \frac{\ln(x) + 2}{2\,\sqrt{x}} \\
f''(x) &= \frac{-\ln(x)}{4x^{\frac{3}{2}}} \\
f'''(x) &= \frac{3\,\ln(x) - 2}{8x^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

6. **Extrempunkt**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{\ln(x)+2}{2\sqrt{x}} &= 0 \\ \ln(x)+2 &= 0 \\ \ln(x) &= -2 \\ x &= e^{-2} \\ x &= \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

   Bei $x = \frac{1}{e^2}$ ist eine mögliche Extremstelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

   $$f'\left(e^{-2}\right) = 0 \text{ und } f''\left(e^{-2}\right) = \frac{-(-2)}{4\,e^{\frac{-6}{2}}} = \frac{2}{4\,e^{-3}} = \frac{1}{2}\,e^3 > 0$$

   (c) **Punkt**

   $$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(e^{-2}\right) = \frac{1}{e} \cdot (-2) = \frac{-2}{e}$$

   Es gibt ein Minimum bei $\left(\frac{1}{e^2}\middle| -\frac{2}{e}\right)$.

7. **Wendepunkt**
   notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

   $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{-\ln(x)}{4x^{\frac{3}{2}}} &= 0 \\ -\ln(x) &= 0 \end{aligned}$$

   Diese Gleichung hat keine Lösung. Daher gibt es keine Wendestelle.

8. **Bild**

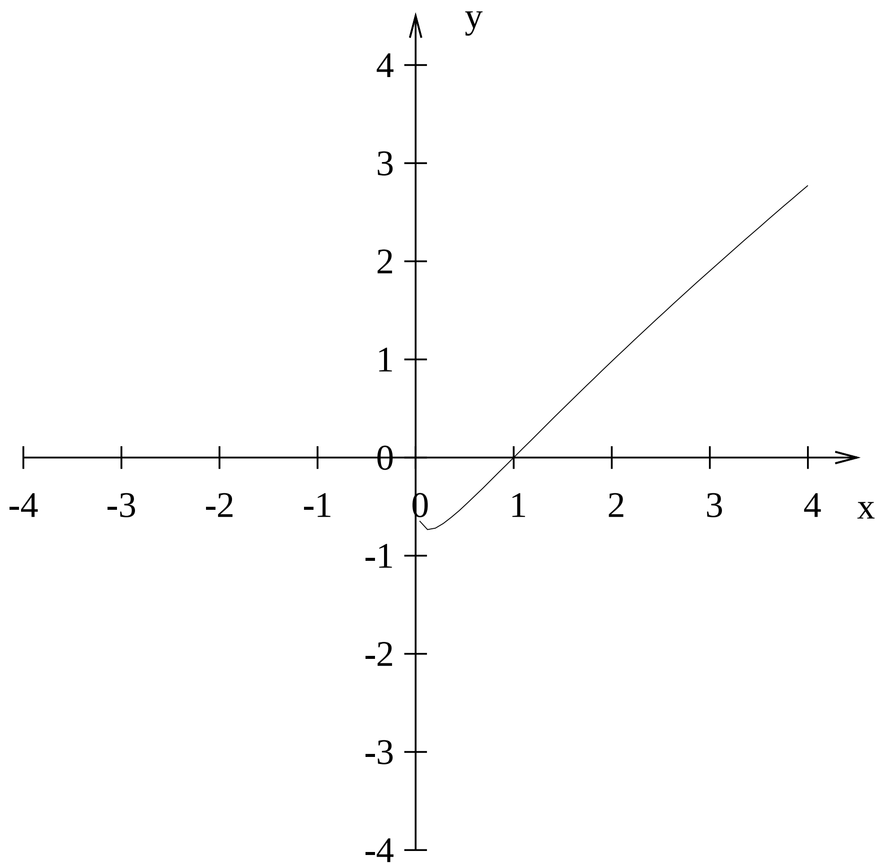


Abbildung 5.6: $f(x) = \sqrt{x}\ \ln(x)$

Zu Aufgabe: 73

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} | x < -1,\ x > 1\}$$

Sie dürfen keine negativen Werte in die Logarithmusfunktion einsetzen. Das Argument der Logarithmusfunktion hier: $\frac{x-1}{x+1}$ hat eine Nullstelle bei $x = 1$ und eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x = -1$.

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Da die Null nicht eingesetzt werden darf, gibt es auch keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) &= 0 && |\ln(1) = 0 \\ \frac{x-1}{x+1} &= 1 \\ x - 1 &= x + 1 \\ -1 &= +1 \end{aligned}$$

   Die Gleichung hat offensichtlich keine Lösung.

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: existiert nicht.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: existiert nicht.

3. **Symmetrie**

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(-1)(x+1)}{(-1)(x-1)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}\right) \\ &= (-1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Es liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen / an den Rändern**

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

$\frac{x-1}{x+1}$ strebt für große x-Werte gegen 1. Da der Bruch für große x-Werte kleiner als 1 ist, ist der Logarithmus negativ. Der Graph nähert sich von unten der x-Achse.

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

$\frac{x-1}{x+1}$ strebt für große negative x-Werte gegen 1. Da der Bruch für große negative x-Werte größer als 1 ist, ist der Logarithmus positiv. Der Graph nähert sich von oben der x-Achse.

$$\lim_{x\to-1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \infty$$

Bei dem Bruch nähert sich der Nenner der null, wenn x gegen (-1) strebt, ist aber positiv. Der Bruch strebt dann gegen unendlich. Also strebt der Logarithmus auch gegen plus unendlich.

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$$

Der Bruch nähert sich null, wenn x gegen 1 strebt, ist aber positiv. Also strebt der Logarithmus gegen minus unendlich.

5. **Ableitungen**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\\
f'(x) &= \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\\
&= \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1-x+1)}{(x+1)^2}\\
&= \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}\\
&= \frac{1}{x-1}\cdot\frac{2}{x+1}\\
&= \frac{2}{(x-1)(x+1)}\\
f''(x) &= \frac{-2[(x+1)+(x-1)]}{(x-1)^2\,(x+1)^2}\\
&= \frac{-4x}{(x-1)^2\,(x+1)^2}\\
f'''(x) &= \frac{-4(x-1)^2\,(x+1)^2-(-4x)[2(x-1)\,(x+1)^2+(x-1)^2\,2(x+1)}{(x-1)^4\,(x+1)^4}
\end{aligned}
$$

kürzen mit: $x-1$ (jeder Summand!)

$$
= \frac{-4(x-1)\,(x+1)^2-(-4x)[2(x+1)^2+(x-1)\,2(x+1)}{(x-1)^3\,(x+1)^4}
$$

kürzen mit: $x+1$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-4(x-1)\,(x+1)-(-4x)[2(x+1)+(x-1)2}{(x-1)^3\,(x+1)^3}\\
&= \frac{-4(x-1)\,(x+1)+4x[2x+2+2x-2}{(x-1)^3\,(x+1)^3}\\
&= \frac{-4(x^2-1)+4x[4x}{(x-1)^3\,(x+1)^3}\\
&= \frac{-4x^2+4)+16x^2}{(x-1)^3\,(x+1)^3}\\
&= \frac{12x^2+4}{(x-1)^3\,(x+1)^3}
\end{aligned}
$$

Die Stammfunktion kann man mit Hilfe der Substitution erhalten:
Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \\ F(x) &= x\,\ln(x) - x \end{aligned}$$

Nach den Regeln für den Logarithmus gilt:

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

Dies kann man jeweils getrennt integrieren. Es gilt jeweils mit entsprechendem z: $\frac{dz}{dx} = 1$

$$\begin{aligned} \int \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\,dx &= \int \ln(x-1)\,dx - \int \ln(x+1)\,dx \\ &= (x-1)\,\ln(x-1) - (x-1) - [(x+1)\,\ln(x+1) - (x+1)] \\ &= (x-1)\,\ln(x-1) - (x-1) - (x+1)\,\ln(x+1) + (x+1) \\ &= x\,\ln(x-1) - \ln(x-1) - x + 1 - x\,\ln(x+1) - \ln(x+1) + x + 1 \\ &= x\,\ln(x-1) - \ln(x-1) - x\,\ln(x+1) - \ln(x+1) + 2 \\ &= x(\ln(x-1) - \ln(x+1)) - \ln(x-1) - \ln(x+1) + 2 \\ &= x\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) - \ln(x-1) - \ln(x+1) + 2 \\ F(x) &= x\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) - \ln(x-1) - \ln(x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ f'(x) &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} \\ f''(x) &= \frac{-4x}{(x-1)^2\,(x+1)^2} \\ f'''(x) &= \frac{12x^2+4}{(x-1)^3\,(x+1)^3} \\ F(x) &= x\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) - \ln(x-1) - \ln(x+1) \end{aligned}$$

6. **Extrempunkt**
   notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{2}{(x-1)(x+1)} &= 0 \end{aligned}$$

   Diese Gleichung hat keine Lösung. Also gibt es auch keine lokale Extremstelle.

7. **Wendepunkt**
   notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{-4x}{(x-1)^2\,(x+1)^2} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

   Null ist leider nicht im Definitionsbereich enthalten, also gibt es auch keine Wendestelle.

8. **Bild**

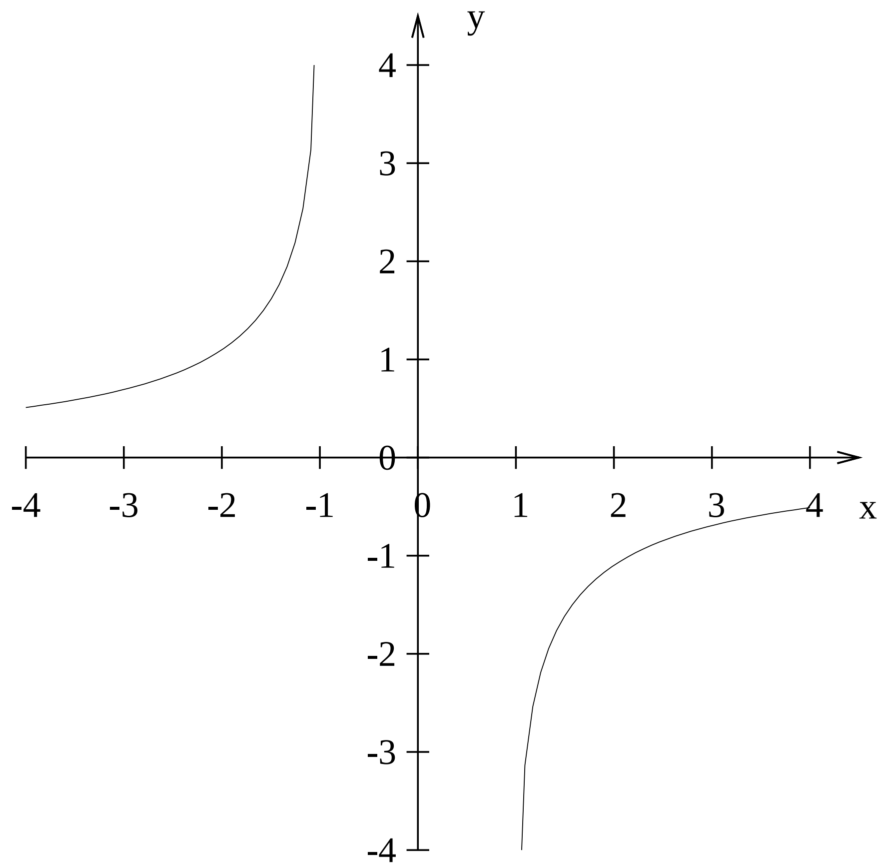


Abbildung 5.7: $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Zu Aufgabe: 74

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. **Der maximale Definitionsbereich**

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

Sie dürfen keine negativen Werte in die Logarithmusfunktion einsetzen. Null dürfen Sie auch nicht einsetzen, schließlich kann die e-Funktion ja auch nicht null werden..

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: Da die Null nicht eingesetzt werden darf, gibt es auch keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{\ln(x)}{x} &= 0 && | \ln(1) = 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

   (a) Schnittpunkt mit der y-Achse: existiert nicht.

   (b) Schnittpunkt mit der x-Achse: $(1|0)$.

3. **Symmetrie** $f(-x)$ darf nicht eingesetzt werden.

Es liegt weder Achsensymmetrie zur y-Achse noch Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} == 0$$

Denn $\ln(x)$ wird immer größer und x wird ebenfalls immer größer für größer werdende x-Werte.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

$\ln(x)$ geht gegen minus unendlich, wenn x gegen null strebt. Wenn Sie dann durch eine kleine Zahl teilen, erhalten Sie eine ganz große negative Zahl.

5. **Ableitungen**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(x)}{x} \\
f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} \\
&= \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\
f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln(x))2x}{x^4} \\
&= \frac{-x - 2x + 2x\ \ln(x)}{x^4} \\
&= \frac{-3x + 2x\ \ln(x)}{x^4} \\
&\text{kürzen aller Summanden mit } x\text{:} \\
&= \frac{2\ \ln(x) - 3}{x^3} \\
f'''(x) &= \frac{\frac{2}{x} \cdot x^3 - (2\ \ln(x) - 3)3x^2}{x^6} \\
&= \frac{2x^2 - 6x^2\ \ln(x) + 9x^2}{x^6} \\
&= \frac{-6x^2\ \ln(x) + 11x^2}{x^6} \\
&= \frac{-6\ \ln(x) + 11}{x^4}
\end{aligned}
$$

Die Stammfunktion kann man mit Hilfe der Substitution bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
z &= \ln(x) \\
\frac{dz}{dx} &= \frac{1}{x} \\
dz &= \frac{1}{x}\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,dx &= \int z\,dz \\
&= \frac{1}{2}z^2 \\
&= \frac{1}{2}(\ln(x))^2
\end{aligned}
$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$
$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$
$$f''(x) = \frac{2\ \ln(x)-3}{x^3}$$
$$f'''(x) = \frac{-6\ \ln(x)+11}{x^4}$$
$$F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

6. **Extrempunkt**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0$$
$$1-\ln(x) = 0$$
$$\ln(x) = 1$$
$$x = e$$

   Bei $x = e$ ist eine mögliche Extremstelle.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$

$$f''(e) = \frac{2-3}{e^3} = -e^{-3} < 0$$

   (c) **Punkt**

$$f(e) = \frac{1}{e}$$

   Es gibt ein Maximum bei $\left(e \,\middle|\, \frac{1}{e}\right)$.

7. **Wendepunkt**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f''(x) = 0$

$$\frac{2\ \ln(x)-3}{x^3} = 0$$
$$2\ \ln(x)-3 = 0$$
$$\ln(x) = \frac{3}{2}$$
$$x = e^{\frac{3}{2}}$$

   Bei $x = e^{\frac{3}{2}}$ ist eine mögliche Wendestelle.

(b) **hinreichende Bedingung: :** $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''\left(e^{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{-6 \cdot \frac{3}{2} + 11}{e^{\frac{12}{2}}} \\ &= \frac{-9 + 11}{e^{\frac{12}{2}}} \\ &= \frac{2}{e^6} \\ &= 2\,e^{-6} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Punkt

$$\begin{aligned} f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3}{2} : e^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot e^{\frac{-3}{2}} \end{aligned}$$

Es gibt einen Wendepunkt bei $(e^{1,5} \,|\, 1{,}5\, e^{1,5})$.

8. **Bild**

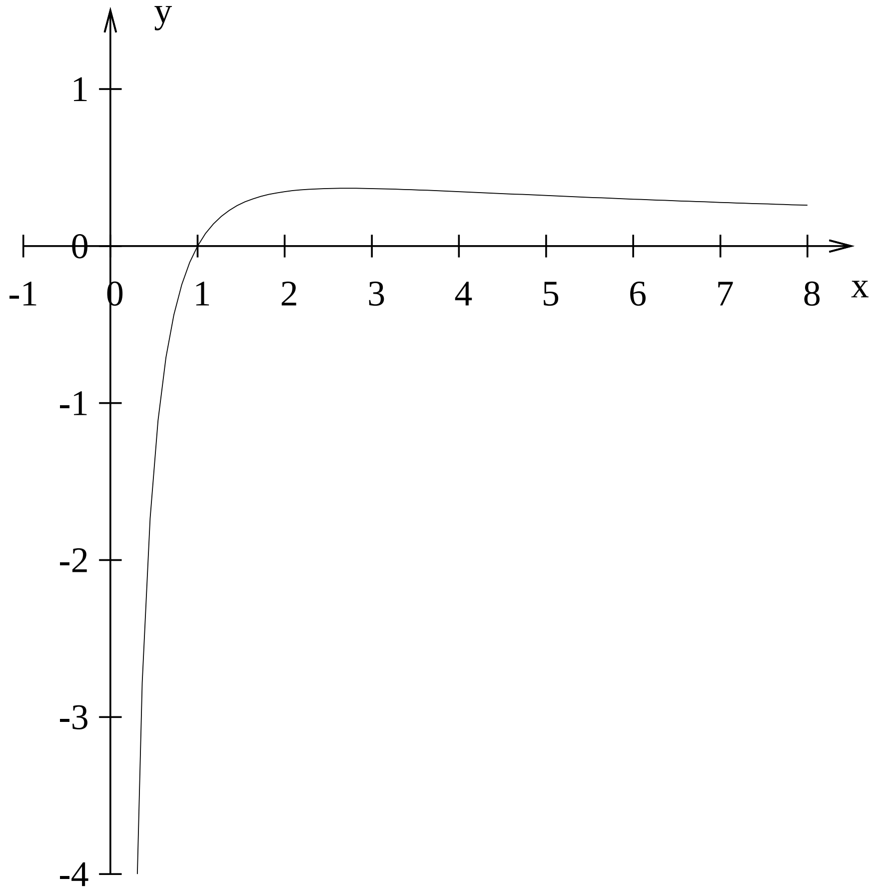


Abbildung 5.8: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Kapitel 6

Umkehrfunktion

In diesem Kapitel betrachten wir die Bildung und Ableitung von Umkehrfunktionen.

Umkehrfunktionen werden benötigt, um Rotationsvolumina auszurechnen, wenn die Funktion um die y-Achse rotiert.

Andererseits ist z.B. $\ln(x)$ als Umkehrfunktion der e-Funktion definiert. Dann muss sich auch die Ableitung aus der e-Funktion ergeben.

Geometrisch lässt sich die Bildung der Umkehrfunktion als Spiegelung an der Winkelhalbierenden ($w(x) = x$) deuten.

6.1 Verfahrensschema

Wir schauen uns zuerst ein Beispiel an und übertragen dann dieses Beispiel in ein allgemeines Schema.

Beispiel:
Wir untersuchen den rechten Ast der Funktion $f(x) = x^2$. Dazu erstellen wir eine Wertetabelle:

x	$y = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9

Wenn man nun die Umkehrfunktion $g(x)$ bildet, dann ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	$g(x)$
0	0
1	1
4	2
9	3

Wie erhält man nun diese Werte?
Nun, offensichtlich sind die Spalten einfach nur vertauscht. Also sind die x-Werte der Umkehrfunktion die y-Werte von $f(x)$, die y-Werte der Umkehrfunktion gerade die x-Werte von $f(x)$.

Dies mag uns zu folgendem Schema zur Bildung einer Umkehrfunktion führen:

1. Schreibe statt $f(x)$: y.
2. Löse nach x auf.
3. Ersetze alle y durch x und umgekehrt.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ y &= x^2 \\ \pm\sqrt{y} &= x \\ \pm\sqrt{x} &= y \\ \pm\sqrt{x} &= g(x) \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion des rechten Astes lautet:

$$g(x) = \sqrt{x}$$

Sie können natürlich nur die Umkehrfunkton bilden, wenn Sie hinterher zu jedem x-Wert nur einen y-Wert erhalten.

Folgende Regel gilt: Sie können die Umkehrfunktion einer Funktion f in dem Intervall (Abschnitt) bilden, in dem die Funktion f streng monoton steigend oder fallend ist.

Eine Funktion ist streng monoton steigend, wenn $f'(x) > 0$. Nehmen Sie einen Punkt des Graphen von f. Wenn Sie ein Stückchen nach rechts gehen, erhalten Sie einen Punkt, der ein bisschen gestiegen ist. Also ein größerer y-Wert. Auf gar keinen Fall denselben.

Bei unserem Beispiel müssen wir den rechten und den linken Ast der Funktion $f(x) = x^2$ getrennt untersuchen, weil der linke Ast eine negative Steigung hat (streng monoton fallend) und der rechte Ast eine positive Steigung hat (streng monoton steigend).

6.2 Ableitung

Die Ableitung der Umkehrfunktion kann man so wie beim Logarithmus durchführen, in dem man die Ableitung durch Spiegelung ermittelt ...

Oder einfacher, so wie bei der Substitution:

Als Beispiel nehmen wir wieder unsere relativ einfache und bekannte Funktion $f(x) = x^2$. $g(x) = \sqrt{y}$ ist dann die Umkehfunktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ y &= x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= f'(x) \\ \frac{dy}{dx} &= 2x \end{aligned}$$

Zur Erinnerung, was da so rauskommen muss:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x} \\ g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Doch Vorsicht, hier steht „x“ bei der Funktion f und bei der Funktion g. Doch der Buchstabe hat unterschiedliche Bedeutung.

Wir gehen jetzt aus von der Funktion $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ y &= x^2 \\ x(y) &= \sqrt{y} && |\,\text{Dies ist die Umkehrfunktion } g(x) \\ \frac{dy}{dx} &= f'(x) \\ \frac{dy}{dx} &= 2x \\ \frac{dx}{dy} &= g'(y) \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{2x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} && |\ \text{Oder als Funktion von } x \\ g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Sie können auch von der Ableitung der Umkehrfunktion direkt ausgehen. Wie auch immer, Sie bilden den Kehrwert vom Bruch dy/dx und müssen dann x, bzw. y durch seine jeweilige Bedeutung ersetzen.

Alternative: $g(x) = y = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{x} \\
x &= y^2 \\
\frac{dx}{dy} &= 2y \\
\frac{dy}{dx} &= g'(x) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \\
&= \frac{1}{2y} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

6.3 Aufgaben zu Umkehrfunktionen

Aufgabe 6.1
Bilden Sie die Umkehrfunktion von:

$$f(x) = e^{2x+5}$$

(Lösung siehe Seite 233).

Aufgabe 6.2
Bilden Sie die Umkehrfunktion:

$$f(x) = x^2 + 4x + 9$$

(Lösung siehe Seite 233).

Aufgabe 6.3
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Prüfen Sie zuerst, ob es eine eindeutige Umkehrfunktion gibt.
(Lösung siehe Seite 233).

Aufgabe 6.4
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Prüfen Sie zuerst, ob es eine eindeutige Umkehrfunktion gibt.
(Lösung siehe Seite 235).

6.4 Lösungen zu den Aufgaben

Zu Aufgabe: 6.1

$$\begin{aligned}
y &= e^{2x+5}\\
\ln(y) &= 2x+5\\
\ln(y)-5 &= 2x\\
\frac{1}{2}\ln(y)-2{,}5 &= x\\
\ln(y^{\frac{1}{2}})-2{,}5 &= x\\
\ln(\sqrt{y})-2{,}5 &= x
\end{aligned}$$

$$g(x) = \ln(\sqrt{x}) - 2{,}5$$

Zu Aufgabe: 6.2

$$\begin{aligned}
x^2+4x+9 &= y\\
x^2+4x &= y-9\\
(x+2)^2 &= y-9+4\\
(x+2)^2 &= y-5\\
x+2 = -\sqrt{y-5} &\text{ od. } x+2=\sqrt{y-5}\\
x = -2-\sqrt{y-5} &\text{ od. } x=-2+\sqrt{y-5}
\end{aligned}$$

Es gibt zwei Umkehrfunktionen. Eine für den rechten Ast und eine für den linken Ast:

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= -2+\sqrt{y-5}\\
g_2(x) &= -2-\sqrt{y-5}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe: 6.3

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\\
f'(x) &= \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})
\end{aligned}$$

Es gibt eine eindeutige Umkehrfunktion, wenn immer gilt:

$$\begin{aligned}
&f'(x) > 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{oder}\\
&f'(x) < 0
\end{aligned}$$

Also suchen wir zuerst die Nullstelle:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) &= 0 \\
e^x - e^{-x} &= 0 \\
e^x &= e^{-x} && \mid \text{Exp.vergleich} \\
x &= -x \\
x &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(1) &> 0 \\
f'(-1) &< 0
\end{aligned}$$

Man muss also die Umkehrfunktion für zwei Intervalle berechnen:

1. $(-\infty; 0]$
2. $[0; \infty)$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
2y &= e^x + e^{-x} \\
2y\, e^x &= e^{2x} + 1 \\
0 &= e^{2x} - 2y\, e^x + 1 \\
e^{2x} - 2y\, e^x + 1 &= 0 && |z = e^x \\
z^2 - 2yz + 1 &= 0 \\
z^2 - 2yz &= -1 \\
(z-y)^2 &= -1 + y^2 \\
(z-y)^2 &= y^2 - 1 \\
z - y = -\sqrt{y^2-1} &\text{ od. } z - y = \sqrt{y^2-1} \\
z = y - \sqrt{y^2-1} &\text{ od. } z = y + \sqrt{y^2-1} \\
e^x = y - \sqrt{y^2-1} &\text{ od. } e^x = y + \sqrt{y^2-1} \\
x = \ln(y - \sqrt{y^2-1}) &\text{ od. } x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) && y \in [0; \infty) \\
g_2(x) &= \ln(x - \sqrt{x^2-1}) && y \in (-\infty; 0]
\end{aligned}$$

g_1 ist der „rechte Zweig“ gespiegelt und g_2 ist der „linke gespiegelte“ Zweig.

Zu Aufgabe: 6.4

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})
\end{aligned}
$$

Es gibt eine eindeutige Umkehrfunktion, wenn immer gilt:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) > 0 && \text{oder} \\
&f'(x) < 0
\end{aligned}
$$

Also suchen wir zuerst die Nullstelle:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) &= 0 \\
e^x + e^{-x} &= 0 \\
e^x &= -e^{-x}
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung kann keine Lösung haben, denn der linke Teil der Gleichung ist positiv und der rechte Teil ist negativ. Es gibt also keine Nullstelle.

$$f'(x) > 0$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
2y &= e^x - e^{-x} \\
2y\, e^x &= e^{2x} - 1 \\
0 &= e^{2x} - 2y\, e^x - 1 \\
e^{2x} - 2y\, e^x - 1 &= 0 && |z = e^x \\
z^2 - 2yz - 1 &= 0 \\
z^2 - 2yz &= 1 \\
(z - y)^2 &= 1 + y^2 \\
(z - y)^2 &= y^2 + 1 \\
z - y = -\sqrt{y^2+1} &\text{ od. } z - y = \sqrt{y^2+1} \\
z = y - \sqrt{y^2+1} &\text{ od. } z = y + \sqrt{y^2+1} \\
e^x = y - \sqrt{y^2+1} &\text{ od. } e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\
x = \ln(y - \sqrt{y^2+1}) &\text{ od. } x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})
\end{aligned}
$$

Nun gibt es ein Problem, denn wir haben oben festgestellt, dass es nur eine Lösung geben kann. Hier sind aber zwei Lösungen. Dann muss eine der Lösungen falsch sein.

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2} &= y\\ \sqrt{y^2+1} &> y\\ y-\sqrt{y^2+1} &> 0\end{aligned}$$

Das Argument des Logarithmus muss immer positiv sein.

$$g(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

Kapitel 7

Polstellen

Polstellen und gebrochenrationale Funktionen sind so nicht mehr im Lehrplan im Weiterbildungskolleg vorhanden. Dieses Kapitel kann also übersprungen werden.

Polstellen bei Funktionen treten auf, wenn der Nenner null wird (Ausnahme: siehe stetig hebbare Nullstelle, Kap.: 7.2). Diese Funktionen sind also auch nicht von „links" nach „rechts" ohne abzusetzen zeichenbar (man sagt: die Funktionen sind nicht stetig.)

Bilder zu Polstellen sind: Abb. 9.1, Abb. 9.2, Abb. 9.3, Abb. 9.4.

7.1 Vorzeichenwechsel bei Polstellen

Die Bilder der Funktionsgraphen bei Polstellen unterscheiden sich dadurch, ob es einen Vorzeichenwechsel (umklappen der Äste des Graphen) an der jeweiligen Stelle gibt.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot(x-3)^2\cdot(x-4)^3}$$

Die Nullstellen des Nenners sind bei: $x = -1$, $x = 3$, $x = 4$.

Wenn man nun die Polstellen untersucht, dann beginnen wir ganz rechts in der Graphik:

1. **Das Verhalten der Funktion für x gegen unendlich:**
   Bei großen Werten für x ist f(x) positiv und nähert sich der x-Achse.

   5 ist ein x-Wert, der größer als jede Polstelle ist und größer als jede Nullstelle ist (hier nicht vorhanden).

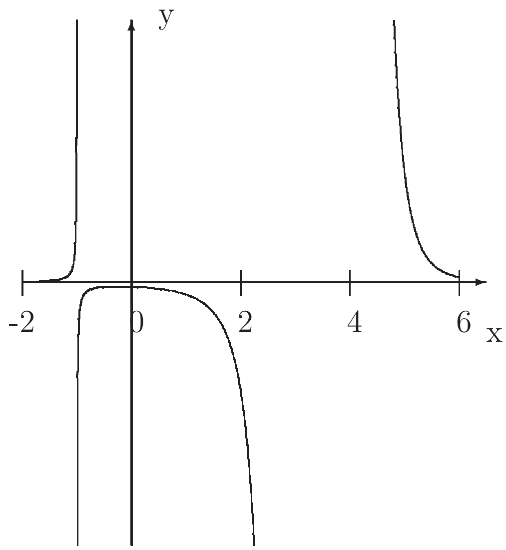


Abbildung 7.1:
$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{(x+1)\cdot(x-3)^2\cdot(x-4)^3}$

$$\begin{aligned} 5+1 &> 0 \\ 5-3 &> 0 \\ 5-4 &> 0 \end{aligned}$$

$$f(5) = \frac{+}{(+)\cdot(+)^2\cdot(+)^3} = +$$

Der Graph ist positiv und bleibt es auch, weil für größere x-Werte weder eine Nullstelle noch eine Polstelle kommen.

2. **Das Verhalten der Funktion an der letzten Polstelle ($x = 4$):**
3,5 ist ein Wert zwischen den Polstellen bei $x = 3$ und $x = 4$.

$$\begin{aligned} 3{,}5+1 &> 0 \\ 3{,}5-3 &> 0 \\ 3{,}5-4 &< 0 \end{aligned}$$

$$f(5) = \frac{+}{(+)\cdot(+)^2\cdot(-)^3} = \frac{+}{(+)\cdot(+)\cdot(-)} = -$$

Unmittelbar links von $x = 4$ ist der Funktionsgraph negativ und rechts von $x = 4$ ist der Funktionsgraph positiv:
Es ist also ein Vorzeichenwechsel vorhanden.

3. **Das Verhalten der Funktion an der Polstellen bei $x = 3$:**
0 ist ein Wert zwischen den Polstellen bei $x = 3$ und $x = -1$.

$$\begin{aligned} 0+1 &> 0 \\ 0-3 &< 0 \\ 0-4 &< 0 \end{aligned}$$

$$f(5) = \frac{+}{(+)\cdot(-)^2\cdot(-)^3} = \frac{+}{(+)\cdot(+)\cdot(-)} = -$$

Es ist also kein Vorzeichenwechsel vorhanden.

4. **Das Verhalten der Funktion an der Polstellen bei $x = -1$:**
-2 ist ein Wert zwischen den Polstellen bei $x = 3$ und $x = 4$.

$$\begin{aligned} -2+1 &< 0 \\ -2-3 &< 0 \\ -2-4 &< 0 \end{aligned}$$

$$f(5) = \frac{+}{(-)\cdot(-)^2\cdot(-)^3} = \frac{+}{(-)\cdot(+)\cdot(-)} = +$$

Links von $x = -1$ ist der Funktionsgraph positiv und rechts von $x = -1$ ist der Funktionsgraph negativ:
Es ist also ein Vorzeichenwechsel vorhanden.

Merkregel: Wenn der Grad der Nullstelle des Nenners gerade ist, dann ist kein Vorzeichenwechsel vorhanden und wenn der Grad der Nullstelle ungerade ist, dann ist ein Vorzeichenwechsel vorhanden.

(Grad der Nullstelle ist der Exponent um der Klammer – bei durchgekürzten Brüchen: Im obigen Beispiel hat die Nullstelle bei -1 den Grad 1, die Nullstelle bei 3 den Grad 2 und die Nullstelle bei 4 hat den Grad 3.)

7.2 Stetig hebbare Lücke

Es reicht nicht nur die Nullstellen des Nenners zu finden.

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

Der Definitionsbereich für x:

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \neq x\}$$

Zur Berechnung der Funktionswerte wird man kürzen:

$$g_2(x) = 1$$

Die Funktionen f und g stimmen auch überall überein, bis auf eine Stelle. Nämlich bei $x = 0$. Dies ist definiert bei g, aber nicht bei f.

Bei der Funktion f fehlt nur ein einziger Punkt. Das bedeutet, dass man f nicht ohne abzusetzen zeichnen kann (also nicht stetig ist). Dies ist so eine unscheinbare, so kleine, Lücke, dass man sagt, dass f an der Stelle $x = 1$ eine stetig hebbare Lücke hat. Denn man muss ja nur einen kleinen winzigen Punkt ergänzen, damit man die Funktion f ohne abzusetzen zeichnen kann.

Insbesondere hat die Funktion f bei $x = 0$ eine Nullstelle im Nenner, aber keine Polstelle!

7.3 Aufgaben

Aufgabe 7.1 Untersuchen Sie f auf Polstellen und dem Verhalten im Unendlichen.

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)(x-5)^2}$$

(Lösung siehe Seite 243).

Aufgabe 7.2 Untersuchen Sie f auf Polstellen und dem Verhalten im Unendlichen.

$$f(x) = \frac{5}{x^2-1}$$

(Lösung siehe Seite 244).

Aufgabe 7.3 Untersuchen Sie f auf Nullstellen, Polstellen und dem Verhalten im Unendlichen.

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

(Lösung siehe Seite 245).

Aufgabe 7.4 Geben Sie die einfachste Funktion an für Abb. 7.2.

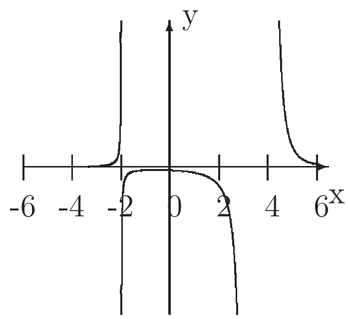


Abbildung 7.2

(Lösung siehe Seite 246).
Aufgabe 7.5 Geben Sie die einfachste Funktion an für Abb. 7.3.

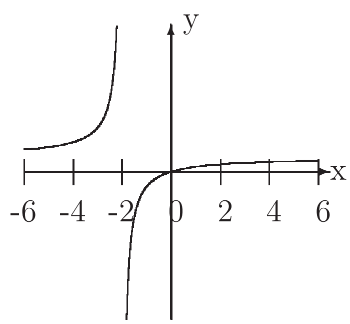


Abbildung 7.3

(Lösung siehe Seite 246).
Aufgabe 7.6 Geben Sie die einfachste Funktion an für Abb. 7.4.

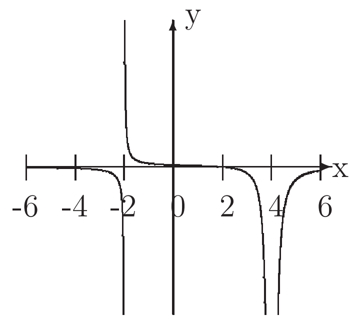


Abbildung 7.4

(Lösung siehe Seite 246).

Aufgabe 7.7 Untersuchen Sie f auf Polstellen und dem Verhalten im Unendlichen.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+2)(x-1)}$$

(Lösung siehe Seite 247).

Aufgabe 7.8 Geben Sie die einfachste Funktion an für Abb. 7.5.

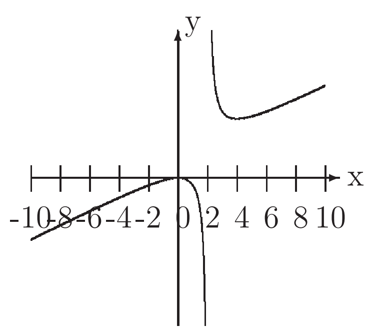


Abbildung 7.5

(Lösung siehe Seite 247).

Aufgabe 7.9 Geben Sie die einfachste Funktion an für Abb. 7.6.

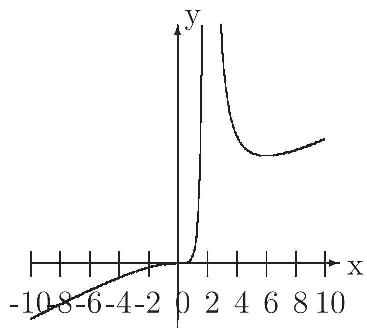


Abbildung 7.6

(Lösung siehe Seite 248).

Aufgabe 7.10 Geben Sie die einfachste Funktion an für Abb. 7.7.

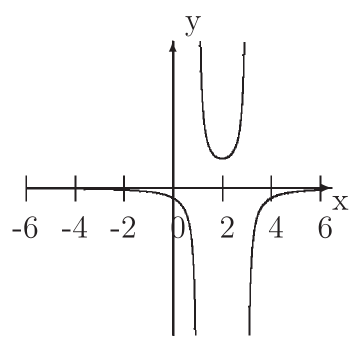


Abbildung 7.7

(Lösung siehe Seite 248).

Aufgabe 7.11 Geben Sie die einfachste Funktion an, die punktsymmetrisch ist und an der Stelle $x = 2$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat.
(Lösung siehe Seite 249).

Aufgabe 7.12 Geben Sie die einfachste Funktion an, die punktsymmetrisch ist und an der Stelle $x = 2$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel hat.
(Lösung siehe Seite 249).

7.4 Lösungen

Zu Aufgabe: 7.1

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)(x-5)^2}$$

Die Polstellen:

1. Bei $x = 4$ ist eine Polstelle mit VZW.
2. Bei $x = 5$ ist eine Polstelle ohne VZW.

$$\lim_{x \to \infty} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} = 0$$

Der Funktionsgraph nähert sich in beiden Fällen im positiven der x-Achse an.

Zu Aufgabe: 7.2

$$f(x) = \frac{5}{x^2 - 1}$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 - 1 & = & 0 \\ x = -1 & oder & x = 1 \end{array}$$

Da der Zähler keine Nullstellen hat bei $x = -1$ oder $x = 1$ sind die Polstellen bei: $x = -1$ und $x = 1$.

1. **Das Verhalten der Funktion für x gegen unendlich:**
   Bei großen Werten für x ist f(x) positiv und nähert sich der x-Achse.
   $$\lim_{x \to \infty} = 0$$
   $$\lim_{x \to -\infty} = 0$$
2. **Das Verhalten der Funktion an der Polstelle bei $x = 1$:**
   0 ist ein Wert zwischen der Polstelle bei $x = -1$ und $x = 1$.

   Für den Nenner gilt:
   $$0^2 - 1 < 0$$
   $$f(0) = \frac{+}{-} = -$$
   Also liegt ein Vorzeichenwechsel vor.
3. **Das Verhalten der Funktion an der Polstelle bei $x = -1$:**
   -2 ist ein Wert links von der Polstelle bei $x = -1$.

   Für den Nenner gilt:
   $$(-2)^2 - 1 > 0$$
   $$f(-2) = \frac{+}{+} = +$$
   Also liegt ein Vorzeichenwechsel vor.

Zu Aufgabe: 7.3

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x = -1 \quad \text{oder} &\quad x = 1 \end{aligned}$$

Da der Zähler keine Nullstellen hat bei $x = -1$ oder $x = 1$ sind die Polstellen bei: $x = -1$ und $x = 1$.

Die Nullstellen von f sind da, wo der Zähler Null wird: $x = 0$.

1. **Das Verhalten der Funktion für x gegen unendlich:**
   Bei großen Werten für x ist f(x) positiv und nähert sich der x-Achse.

   Wenn a sehr groß ist:
   $$f(a) = \frac{+}{+} = +$$
   $$\lim_{x \to \infty} = 0$$
   $$\lim_{x \to -\infty} = 0$$
   Weil der Grad des Nenners 2 ist und der Grad des Zählers 1 ist.

2. **Das Verhalten der Funktion an der Polstelle bei $x = 1$:**
   0,5 ist ein Wert zwischen der Polstelle bei $x = 1$ und der Nullstelle bei $x = 0$.

   Für den Nenner gilt:
   $$0{,}5^2 - 1 < 0$$
   $$f(0{,}5) = \frac{+}{-} = -$$
   Also liegt ein Vorzeichenwechsel vor.

3. Bei f(0) ist die Nullstelle, und auch dort ist ein Vorzeichenwechsel (d. h. f(x) berührt die x-Achse nicht, sondern schneidet sie): -0,5 ist ein Wert zwischen der Polstelle bei $x = -1$ und der Nullstelle bei $x = 0$.

   Für den Nenner gilt:
   $$-0{,}5^2 - 1 < 0$$
   $$f(-0{,}5) = \frac{-}{-} = +$$
   Also liegt ein Vorzeichenwechsel vor.

4. **Das Verhalten der Funktion an der Polstelle bei $x = -1$:**
   -2 ist ein Wert links von der Polstelle bei $x = -1$.

   Für den Nenner gilt:
$$(-2)^2 - 1 > 0$$
$$f(-2) = \frac{-}{+} = -$$
   Also liegt ein Vorzeichenwechsel vor.

Zu Aufgabe: 7.4 Die einfachste Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-3)(x-4)^2}$$

Polstellen:

1. $x = 4$ ohne VZW
2. $x = 3$ mit VZW
3. $x = -2$ mit VZW

Zu Aufgabe: 7.5 Die einfachste Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{x}{(x+2)}$$

Polstellen:

1. $x = -2$ mit VZW, also eine Nullstelle im Nenner mit ungeradem Grad (Exponent um die Klammer ist ungerade).

Nullstelle bei $x = 0$, also muss der Zähler bei $x = 0$ eine Nullstelle haben.
Da der Graph sich nicht der x-Achse nähert, kann der Grad des Nenners nicht größer sein, als der des Zählers.

Zu Aufgabe: 7.6 Die einfachste Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{-(x-2)}{(x+2)\cdot(x-4)^2}$$

Polstellen:

1. $x = -2$ mit VZW, also eine Nullstelle im Nenner mit ungeradem Grad (Exponent um die Klammer ist ungerade).
2. $x = 2$ ohne VZW, also eine Nullstelle im Nenner mit ungeradem Grad (Exponent um die Klammer ist ungerade).

Nullstelle bei $x = 2$, also muss der Zähler bei $x = 2$ eine Nullstelle haben.

Im unendlichen nähert sich der Graph vom negativen der x-Achse. Darum muss der Zähler noch ein Minuszeichen enthalten.

Zu Aufgabe: 7.7

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+2)(x-1)}$$

Der Nenner kann umgeschrieben werden zu:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

Da der Zähler und der Nenner jeweils eine einfache Nullstelle haben bei $x = 1$, hat f bei $x = 1$ eine stetig hebbare Lücke.

Die bis auf $x = 1$ identische Funktion ist g:

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2} = 1 + \frac{-1}{x+2}$$

Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x = -1$.

Die Polstellen:
Bei $x = -2$ ist eine Polstelle mit VZW.

$\lim_{x\to\infty}$ ist positiv (Polynomdivision ergibt die Asymptote 1)
$\lim_{x\to-\infty}$ ist positiv (Polynomdivision ergibt die Asymptote 1)

positiv / negativ Betrachtung:

$$f(0) = \frac{-}{(+)(-)} = +$$

Von rechts nach links gedacht:

1. Bei $x = 0$ ist f(x) positiv.

2. Bei $x = -1$ hat f(x) eine Nullstelle.

3. Zwischen $x = -1$ und $x = -2$ ist f(x) dann negativ.

4. Bei $x = -2$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

5. Bei kleineren Werten als $x = -2$ ist f(x) positiv.

f(x) nähert sich der Asymptote (a), mit $a(x) = -1$ für kleine Werte von oben (dann ist $\frac{-1}{x+2}$ positiv) und für große Werte von unten (dann ist $\frac{-1}{x+2}$ negativ).

Zu Aufgabe: 7.8 Die einfachste Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)}$$

Der Graph hat eine Nullstelle bei $x = 0$. Im Zähler muß x^2 stehen, dafür gibt es zwei mögliche Argumente:

1. Der Graph berührt die x-Achse, es gibt keinen Durchgang durch die x-Achse, also muss der Grad der Nullstelle gerade sein.
2. Für große x-Werte geht der Graph gegen unendlich. Also muss der Grad des Polynoms im Zähler größer sein, als der Grad des Nenners. Der Grad des Nenners ist aber ungerade. Der kleinste mögliche Grad des Nenners ist 1, der des Zählers dann 2.

Polstellen:

1. $x = 2$ mit VZW, also eine Nullstelle im Nenner mit ungeradem Grad (Exponent um die Klammer ist ungerade).

Zu Aufgabe: 7.9 Die einfachste Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

Der Graph hat eine Nullstelle bei $x = 0$. Im Zähler muß x^3 stehen, dafür gibt es zwei mögliche Argumente:

1. Der Graph berührt die x-Achse, es gibt einen Durchgang durch die x-Achse, also muss der Grad der Nullstelle ungerade sein.
2. Für große x-Werte geht der Graph gegen unendlich. Also muss der Grad des Polynoms im Zähler größer sein, als der Grad des Nenners. Der Grad des Nenners ist aber gerade. Der kleinste mögliche Grad des Nenners ist 2, der des Zählers dann 3.

Polstellen:

1. $x = 2$ ohne VZW, also eine Nullstelle im Nenner mit geradem Grad (Exponent um die Klammer ist gerade).

Zu Aufgabe: 7.10 Die einfachste Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{-1}{(x-1)(x-3)}$$

Der Graph hat keine Nullstelle.
Polstellen:

1. $x = 1$ mit VZW, also eine Nullstelle im Nenner mit ungeradem Grad (Exponent um die Klammer ist ungerade).
2. $x = 3$ mit VZW, also eine Nullstelle im Nenner mit ungeradem Grad (Exponent um die Klammer ist ungerade).

Da der Graph für große x-Werte negativ ist, muss im Zähler noch ein Minuszeichen sein.

Zu Aufgabe: 7.11

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2(x+2)^2}$$
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Der Nenner ($h(x)$) muss an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle haben, die vom Grad 2 (kleinste gerade Zahl) ist.

Da die Funktion punktsymmetrisch sein soll, muss f auch an der Stelle $x = -2$ eine Polstelle haben:

$$h(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2)^2$$

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x-2)^2 \cdot (-x+2)^2 \\ &= [(-1)(x+2)]^2 \cdot [(-1)(x-2)]^2 \\ &= (-1)^2(x+2)^2 \cdot (-1)^2(x-2)^2 \\ &= (x+2)^2 \cdot (x-2)^2 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Der Nenner ist damit achsensymmetrisch!
Darum muss der Zähler punktsymmetrisch sein:

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2 \cdot (x+2)^2}$$

Zu Aufgabe: 7.12

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x+2)}$$
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Der Nenner ($h(x)$) muss an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle haben, die vom Grad 1 (kleinste ungerade Zahl) ist.

Da die Funktion punktsymmetrisch sein soll, muss f auch an der Stelle $x = -2$ eine Polstelle haben:

$$h(x) = (x-2) \cdot (x+2)$$

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x-2) \cdot (-x+2) \\ &= (-1)(x+2) \cdot (-1)(x-2) \\ &= (-1)(x+2) \cdot (-1)(x-2) \\ &= (x+2) \cdot (x-2) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Der Nenner ist damit achsensymmetrisch!
Darum muss der Zähler punktsymmetrisch sein:

$$f(x) = \frac{x}{(x-2) \cdot (x+2)}$$

Kapitel 8

Gebrochen Rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen sind Funktionen, bei denen in einem Bruch sowohl im Zähler als auch im Nenner Polynome[1] auftreten.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^3 + 2x}$$

Zuerst wird man die Funktion auf ihren Definitionsbereich hin untersuchen. Dazu muss man die Nullstellen des Nenner feststellen und sich entscheiden, ob es Polstellen oder stetig hebbare Lücken sind.

Natürlich will man auch hier wieder die Funktion auf Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte untersuchen. Dazu muss man bei f, f', f'' jeweils Nullstellen finden. Die Nullstellen einer gebrochen rationalen Funktion sind die Nullstellen des Nenners.

Die Integration wird in der Regel nicht gelingen. Es gibt einen Sonderfall, bei dem man integrieren kann, dazu benötigt man aber die ln-Funktion.

Es werden zuerst tabellarische Regeln gezeigt, dann werden verschiedene Beispiele gezeigt, um die Regeln zu verdeutlichen.

Ein zentraler Begriff wird der des „Grades“ sein.

1. Grad eines Polynoms:

   $$f(x) = 5x^7 + 3x^2 + 2x - 1$$

   Grad(f) ist die Angabe nach dem höchsten Exponenten von x: Grad(f) = 7

2. Grad einer Nullstelle:

   $$f(x) = (x-3)^3 \cdot (x-5) \cdot (x-7)^10$$

   (a) Der Grad der Nullstelle bei $x = 3$ ist 3

[1] Beispiele für Polynome: $3x^2 + 2x + 4$ oder $x^5 - 2x$.

(b) Der Grad der Nullstelle bei $x = 5$ ist 1

(c) Der Grad der Nullstelle bei $x = 7$ ist 7

(d) Der Grad der Nullstelle bei $x = 10$ ist 0, denn dort hat $f(x)$ keine Nullstelle.

8.1 Schema: Nullstelle - Definitionsbereich

Zuerst wird das Vorgehen beschrieben, und danach werden einzelne Fälle untersucht, so dass das Vorgehen verständlich ist. Probleme treten auf, wenn eine

Es müssen die Nullstelle im Zähler und im Nenner einzeln untersucht werden.

Grob kann man festhalten:
Die Nullstellen im Zähler sind für die Nullstellen der Funktion verantwortlich und die Nullstellen im Nenner verursachen die Polstellen bzw. die stetig hebbaren Lücken.

Eine Nullstelle im Zähler bedeutet eine Definitionslücke an der Stelle.

Eine Nullstelle im Zähler und eine Nullstelle im Nenner an derselben Stelle: Grad der Nullstelle im Zähler und Grad der Nullstelle im Nenner beziehen sich auf diese zu untersuchende Stelle. Es gilt drei Fälle zu untersuchen:

1. Grad der Nullstelle im Zähler = Grad der Nullstelle im Nenner: stetig hebbare Lücke
   Der y-Wert für den zu ergänzenden Punkt ergibt sich aus dem gekürzten Bruch.

2. Grad der Nullstelle im Zähler > Grad der Nullstelle im Nenner: stetig hebbare Lücke, wenn man den fehlenden Punkt ergänzen will, ist der y-Wert null.

3. Grad der Nullstelle im Zähler < Grad der Nullstelle im Nenner: Polstelle

   (a) Grad der Nullstelle im Nenner − Grad der Nullstelle im Zähler ist ungerade:
   Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

   (b) Grad der Nullstelle im Nenner − Grad der Nullstelle im Zähler ist gerade:
   Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Wenn der Zähler oder der Nenner keine Nullstelle an der Stelle haben, dann ist der Grad der Nullstelle des Zählers bzw. des Nenners an der Stelle 0.
(Beachten Sie, wenn Sie eine stetig hebbare Lücke haben ist dort auch eine Definitionslücke.)

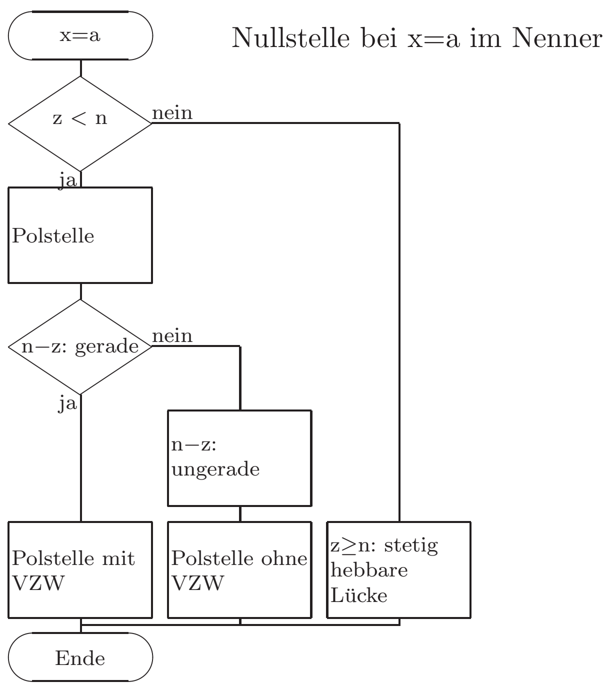


Abbildung 8.1: Ein Entscheidungsdiagramm, wenn eine Nullstelle bei $x = a$ im Zähler und im Nenner von f auftritt. z sei der Grad der Nullstelle im Zähler, n sei der Grad der Nullstelle im Nenner.

8.2 Verhalten im Unendlichen

Beispiele:

1. $$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

   Wenn Sie unendlich große Zahlen einsetzen, dann werden die y-Werte immer größer werden.

   Wenn der Zählergrad größer ist als der Nennergrad, dann werden für große x-Werte die y-Werte immer größer:

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) \to \infty$$

2. $$f(x) = \frac{3x^2+1}{4x^2}$$

   Wenn Sie unendlich große Zahlen einsetzen, dann ist der Zähler zwar immer größer als der Nenner, doch das macht irgendwann fast gar nichts mehr aus.

   $$f(1000) = \frac{3\cdot 1000^2+1}{4\cdot 1000^2} = \frac{3000001}{4000000} \approx \frac{3}{4}$$

   Wenn Sie also im Zähler und im Nenner die gleichen größten Exponenten haben, dann entscheiden die Vorfaktoren dieses Summanden im Zähler und Nenner:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^{10}+3x^2+5}{2x^{10}-4x^9+x^4-2} = \frac{8}{2} = 4$$

3. $$f(x) = \frac{3x}{4x^2+1}$$

   Der Nennergrad ist größer als der Zählergrad. Darum werden bei größen x-Werten die y-Werte immer kleiner und nähern sich immer mehr der null.

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{4x^2+1} = 0$$

8.3 Beispiele

8.3.1 $f(x) = \frac{x}{x}$

$$f(x) = \frac{x}{x}$$

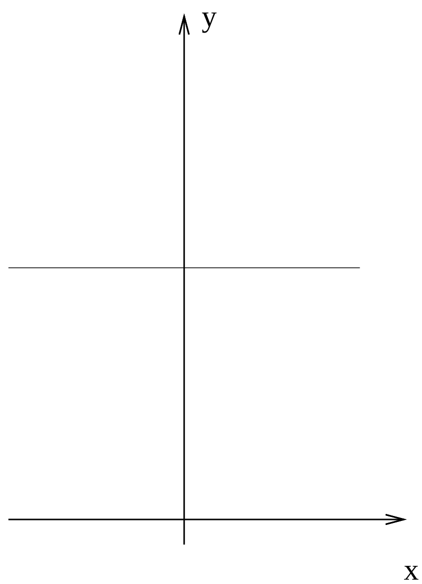


Abbildung 8.2: $f(x) = \frac{x}{x}$ Die Funktion sieht aus, wie $y = 1$.

Wenn man sich das Bild dieser Funktion anschaut, dann sieht das Bild aus wie von der Funktion $y = 1$.

Nur nicht an der Stelle: $x = 0$. Denn dort ist die Funktion nicht definiert!

$$f(x) = \frac{x}{x}, \qquad \mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

x darf jede reelle Zahl sein, nur nicht null!

Das heißt zwischen dem Bild von $f(x)$ und der Funktion $y = 1$ gibt es einen ganz kleinen Unterschied. $f(x)$ enthält keinen Punkt an der Stelle $x = 0$.

Dies ist aber auch der einzige Unterschied!

Diesen einen Punkt kann man sicherlich ergänzen. Dann ist die Funktion stetig, das heißt, man kann sie von ganz links bis ganz rechts zeichnen ohne abzusetzen.

Darum sagt man, dass $f(x)$ eine **stetig hebbare Lücke** an der Stelle $x = 0$ hat.

8.3.2 $f(x) = \frac{(x+2)(x+5)}{(x+2)^2}$

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+5)}{(x+2)^2}$$

1. Verhalten gegen Unendlich:
   $$\begin{aligned}\text{Zählergrad}(f) &= 2\\ \text{Nennergrad}(f) &= 2\end{aligned}$$
   Da Zählergrad(f) = Nennergrad(f) gilt, sind bei hohen Zahlen für x die Werte im Nenner gleich. Der Vorfaktor der höchsten Potenz im Zähler ist 1 und der Vorfaktor der höchsten Potenz im Nenner ist auch 1.
   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

2. Nullstellen, Definitionsbereich:
   (a) Nullstellen des Zählers:
      i. $x = -2$: Grad: 1
      ii. $x = -5$: Grad: 1
   (b) Nullstellen des Nenners: $x = -2$: Grad 2

   Die Funktion ist nicht definiert bei $x = -2$, da dann der Nenner null wird.

   Untersuchung aller Nullstellen (Zähler und Nenner):

   (a) $x = -2$:
   Grad der Nullstelle im Zähler ($= 1$)$<$ Grad der Nullstelle im Nenner ($= 2$)
   Die Differenz: $2 - 1 = 1$ (ungerade)
   Bei $x = -2$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vorhanden.

   (b) $x = -5$. Im Nenner liegt an der Stelle keine Nullstelle vor, also hat $f(x)$ an der Stelle eine Nullstelle.

3. Extremstellen, Wendestellen:
   $$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(x+2)(x+5)}{(x+2)^2}\\ f'(x) &= -\frac{3}{(x+2)^2}\\ f''(x) &= \frac{6}{(x+2)^3}\end{aligned}$$
   notwendige Bedingung:

   (a) Extremstellen:
   $$f'(x) = 0$$
   dies kann nicht sein, weil der Zähler von f' nie null werden kann.

(b) Wendestellen:

$$f''(x) = 0$$

dies kann nicht sein, weil der Zähler von f'' nie null werden kann.

8.4 Aufgaben

Aufgabe 8.1
Untersuchen Sie folgende Funktion auf Nullstellen, den Definitionsbereich und untersuchen Sie die Definitionslücken. Bestimmen Sie daüber hinaus das Verhalten im Unendlichen.

$$f(x) = \frac{(x+5)(x+2)^2 x^3 (x-4)^3 (x-7)^2}{(x+6)(x+2)^2 x (x-4)^5 (x-7)^3}$$

(Lösung siehe Seite 260).

Aufgabe 8.2
Untersuchen Sie folgende Funktion auf Nullstellen, den Definitionsbereich und untersuchen Sie die Definitionslücken. Bestimmen Sie daüber hinaus das Verhalten im Unendlichen.

$$f(x) = \frac{(x-2)^2(x^2-9)}{(x-2)^3(x-3)}$$

(Lösung siehe Seite 261).

Aufgabe 8.3
Untersuchen Sie folgende Funktion auf Nullstellen, den Definitionsbereich und untersuchen Sie die Definitionslücken. Bestimmen Sie daüber hinaus das Verhalten im Unendlichen.

$$f(x) = \frac{3(x-2)^2 x (2x-10)^2}{4(x-2)^4(x-5)}$$

(Lösung siehe Seite 262).

Aufgabe 8.4
Untersuchen Sie folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-16)}$$

(Lösung siehe Seite 263).

Aufgabe 8.5
Gegeben ist folgende Funktion:

$$f_a(x) = \frac{x^2}{(x+a)}$$

1. Geben Sie den Definitionsbereich für x und die Art der Definitionslücke an.

2. Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen.

3. Untersuchen Sie die Symmetrie der Funktion.

4. Geben Sie die Extrempunkte an.

5. Untersuchen Sie die Funktion auf Wendestellen.
6. Bestimmen Sie die Ortskurven der Extrempunkte.

(Lösung siehe Seite 266).

8.5 Lösungen

Zu Aufgabe: 8.1

$$f(x) = \frac{(x+5)(x+2)^2x^3(x-4)^3(x-7)^2}{(x+6)(x+2)^2x(x-4)^5(x-7)^3}$$

Der Definitionsbereich von f ist:

$$D_x = \mathbb{R} \setminus \{-6, -2, 0, 4, 7\}$$

x ist Element der reellen Zahlen, ohne (\) die Werte der Menge {-6, -2, 0, 4, 7 }.
Ausgeschloßen werden alle Werte für x, die Nullstellen des Nenners sind.
Der gekürzte Bruch lautet:

$$g(x) = \frac{(x+5)x^2}{(x+6)(x-4)^2(x-7)}$$

Die Grade beziehen sich immer auf die jeweiligen Nullstellen.

- $x = -6$
  Polstelle mit Vorzeichenwechsel, da Zählergrad = 0, Nennergrad = 1 (ungerade).

- $x = -5$
  Nullstelle, da im Nenner keine Nullstelle bei $x = -5$.

- $x = -2$
  stetig hebbare Lücke. Denn der Zählergrad = 2 und der Nennergrad der Stelle ist auch (-2).

- $x = 0$
  stetig hebbare Lücke. Wenn man den Punkt ergänzen will, so ist es der Punkt: (0|0). Denn im gekürzten Bruch ist bei $x = 0$ eine Nullstelle.

- $x = 4$
  Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Denn:
  Zählergrad − Nennergrad = 3-5 = -2.
  Also ist die Polstelle gerade.

- $x = 6$
  Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Denn:
  Zählergrad − Nennergrad = 2-3 = -1.
  Also ist die Polstelle ungerade.

Das Verhalten im Unendlichen:
Der Zählergrad von $f = 11$
Der Nennergrad von $f = 12$

Zählergrad $-$ Nennergrad $= -1$
Daraus folgt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Zu Aufgabe: 8.2

$$f(x) = \frac{(x-2)^2(x^2-9)}{(x-2)^3(x-3)}$$

Der Definitionsbereich von f ist:

$$D_x = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

x ist Element der reellen Zahlen, ohne (\) die Werte der Menge {2, 3 }.
oder

$$D_x = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 2, x \neq 3\}$$

Ausgeschlossen werden alle Werte für x, die Nullstellen des Nenners sind.
Der gekürzte Bruch lautet:

$$g(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x+3)}{(x-2)}$$

- $x = 2$
  Polstelle mit Vorzeichenwechsel, da Grad der Nullstelle $x = 2$ im Zähler ist 2, Grad der Nullstelle $x = 2$ im Nenner ist 3. Die Differenz ist ungerade.

- $x = -3$
  Nullstelle, da im Nenner keine Nullstelle bei $x = -5$.

- $x = 3$
  stetig hebbare Lücke. Denn der Grad der Nullstelle $x = 3$ im Zähler ist 1 und der Grad der Nullstelle im Nenner ist auch 1.

Das Verhalten im Unendlichen:
Der Zählergrad von $f = 4$
Der Nennergrad von $f = 4$

Zählergrad $-$ Nennergrad $= 0$
Wenn Sie die Klammern ausmultiplizieren, ist der Vorfaktor des Terms mit x^4 sowohl im Nenner als auch im Zähler jeweils 1.

Daraus folgt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

Zu Aufgabe: 8.3

$$f(x) = \frac{3(x-2)^2 x(2x-10)^2}{4(x-2)^4(x-5)}$$

Der Definitionsbereich von f ist:

$$D_x = \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$$

x ist Element der reellen Zahlen, ohne (\) die Werte der Menge {2, 5 }.
oder

$$D_x = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 2, x \neq 5\}$$

Ausgeschloßen werden alle Werte für x, die Nullstellen des Nenners sind.

$$(2x-10)^2 = [2 \cdot (x-5)]^2 = 4(x-5)^2$$

Der gekürzte Bruch lautet:

$$g(x) = \frac{3 \cdot 4(x-5)^2}{4(x-2)(x-5)} = \frac{3(x-5)}{(x-2)}$$

- $x = 2$
  Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, da Zählergrad = 2, Nennergrad = 4. Die Differenz ist gerade.

- $x = 0$
  Nullstelle, da im Nenner keine Nullstelle bei $x = 0$.

- $x = 5$
  stetig hebbare Lücke. Denn der Zählergrad = 2 ist größer als der Nennergrad = 4 der Nullstelle bei 5.

  Der zu ergänzende Punkt ist: (5|0).

Das Verhalten im Unendlichen:
Der Zählergrad von $f = 5$
Der Nennergrad von $f = 5$

Zählergrad − Nennergrad = 0
Daraus folgt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

Zu Aufgabe: 8.4

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2 - 16)}$$

1. **Der Definitionsbereich**
   Wir untersuchen den Nenner:
   $$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$
   $$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -4, x \neq 4\}$$

2. **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen**
   (a) **Schnittpunkt mit der y-Achse**
   $$f(0) = \frac{0}{-16} = 0$$
   (b) **Schnittpunkte mit der x-Achse**
   Hier ist nur der Zähler entscheidend:
   $$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{x^3}{(x^2 - 16)} &= 0 \\ x^3 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$
   Die (einzige) Nullstelle ist bei (0|0).

3. **Symmetrie**
   $$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3}{((-x)^2 - 16)} \\ &= \frac{-x^3}{(x^2 - 16)} \\ &= -\frac{x^3}{(x^2 - 16)} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$
   Es liegt also eine Punktsymmetrie vor.

4. **Verhalten im Unendlichen**
   Der Zählergrad ist größer als der Nennergrad und die Differenz zwischen Zählergrad und Nennergrad ist ungerade. Daher gilt:
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$
   Die Funktion nähert sich der Aymptote: $a(x) = x$.

5. **Ableitungen**

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^3}{(x^2-16)} \\
f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-16) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-16)^2} \\
&= \frac{3x^4 - 48x^2 - 2x^4}{(x^2-16)^2} \\
&= \frac{3x^4 - 48x^2 - 2x^4}{(x^2-16)^2} \\
&= \frac{x^4 - 48x^2}{(x^2-16)^2} \\
f''(x) &= \frac{(4x^3 - 92x)(x^2-16)^2}{(x^2-16)^4} - \frac{(x^4-48x^2)2(x^2-16)2x}{(x^2-16)^4} \\
f''(x) &= \frac{32x(x^2+48)}{(x^2-16)^3}
\end{aligned}$$

6. **Extremwerte**

   (a) **notwendige Bedingung:** $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{x^4 - 48x^2}{(x^2-16)^2} &= 0 \\
x^4 - 48x^2 &= 0 \\
x^2(x^2 - 48) &= 0
\end{aligned}$$

   $x = 0$, $x = -\sqrt{48}$,
   $x = \sqrt{48}$
   Mögliche Extremstellen sind bei $x = 0$, $x = -\sqrt{48}$,
   $x = \sqrt{48}$.

   (b) **hinreichende Bedingung:** $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$

   - $$f'(0) = 0 \text{ und } f''(0) = 0$$

     Da $f''(0)$ gilt, deutet dies auf eine Wendestelle bzw. Sattelpunkt hin und die hinreichende Bedingung ist nicht erfüllt. Wir untersuchen also die Stelle auf eine Wendestelle (siehe unten).

   - $$f'(\sqrt{48}) = 0 \text{ und } f''(\sqrt{48}) = \frac{3\sqrt{3}}{8} > 0$$

     An der Stelle $\sqrt{48}$ ist also ein Minimum vorhanden.

- $$f''(-\sqrt{48}) = 0 \text{ und } f''(-\sqrt{48}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} < 0$$

  Wegen der Punktsymmetrie ist bei $-\sqrt{48}$ ein Maximum vorhanden.

(c) **Extrempunkte**

$$f(\sqrt{48}) = 6\sqrt{3}$$
$$f(-\sqrt{48}) = -6\sqrt{3}$$

Maximum: $(-\sqrt{48}| - 6\sqrt{3})$ und Minimum: $(\sqrt{48}|6\sqrt{3})$.

7. **Wendepunkt**

(a) **notwendige Bedingung:** $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \frac{32x(x^2+48)}{(x^2-16)^3} &= 0 \\ 32x(x^2+48) &= 0 \\ x(x^2+48) &= 0 \\ x &= 0, \quad \text{da } x^2+48 > 0 \end{aligned}$$

Da $x^2 + 48$ immer größer null ist, hat der Faktor keine Nullstelle. Es gibt also einen möglichen Wendepunkt bei $x = 0$.

(b) **hinreichende Bedingung:**
Um nun nicht die dritte Ableitung berechnen zu müssen wird das Vorzeichenkriterium angewendet:

$$f''(0) = 0 \text{ und}$$

$$f''(-1) = \frac{1568}{3375} > 0$$
$$f''(1) = -\frac{1568}{3375} > 0$$

Es gibt einen Vorzeichenwechsel. Damit ist bei $x = 0$ eine Wendestelle.

Das macht auch Sinn, schließlich ist die Originalfunktion punktsymmetrisch. Bei punktsymmetrischen ganzrationalen Funktionen ist immer bei $x = 0$ eine Wendestelle.

(c) **Wendepunkt**

$$f(0) = 0$$

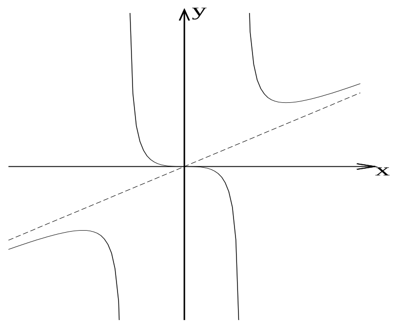


Abbildung 8.3: $f(x) = \frac{x^3}{(x^2-16)}$ Eingezeichnet ist auch die Asymptote: $a(x) = x$

8. **Polstellen**
   Bei $x = -4$ und bei $x = 4$ liegt jeweils eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor, da der Nullstellengrad im Nenner jeweils ungerade (1) ist.

9. **Zeichung**
   siehe Abbildung: 8.3.

Zu Aufgabe: 8.5

$$f_a(x) = \frac{x^2}{(x+a)}$$

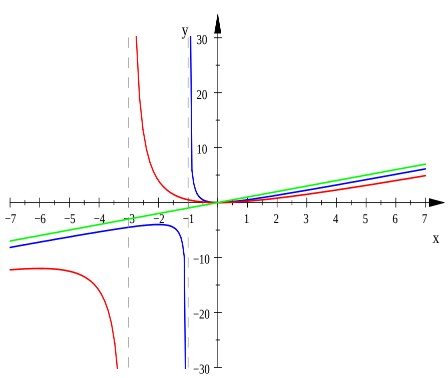


Abbildung 8.4: $f_a(x) = \frac{x^2}{(x+a)}$ Eingezeichnet sind die Funktionen $f_1(x)$ und $f_3(x)$ und die Asymptote: $a(x) = x$

1. Geben Sie den Definitionsbereich für x und die Art der Definitionslücke an.

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -a\}$$

Da im Zähler bei $-a$ keine Nullstelle vorliegt, kann es sich nicht um eine stetig hebbare Lücke handeln. Bei $x = -a$ liegt eine Polstelle vor, da der Grad der Nullstelle ungerade (1) ist, ist es eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

2. Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen.

   Der Zählergrad ist größer als der Nennergrad, darum gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \to \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \to -\infty$$

   Der Zählergrad unterscheidet sich vom Nennergrad um eins, darum existiert eine Asymptote:

$$a(x) = x$$

3. Untersuchen Sie die Symmetrie der Funktion.

$$\begin{aligned} f_a(-x) &= \frac{(-x)^2}{(-x+a)} \\ &= \frac{x^2}{(-x+a)} \\ &\neq f_a(x) \\ &\neq -f_a(x) \end{aligned}$$

   Es liegt keine Achsensymmetrie zur y-Achse und keine Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

4. Geben Sie die Extrempunkte an.

   (a) Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \frac{x^2}{(x+a)} \\ f_a'(x) &= \frac{x(2a+x)}{(x+a)^2} \\ f_a''(x) &= \frac{2a^2}{(x+a)^3} \end{aligned}$$

   (b) notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{array}{rcl} f_a'(x) & = & 0 \\ \dfrac{x(2a+x)}{(x+a)^2} & = & 0 \\ x(2a+x) & = & 0 \\ x = 0 & \text{oder} & x = -2a \end{array}$$

   Bei $x = 0$ und bei $x = -2x$ sind mögliche Extremstellen.

(c) hinreichende Bedingung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'_a(0) &= 0 \text{ und} \\ f''_a(0) &= \frac{2}{a} \\ f'_a(-2a) &= 0 \text{ und} \\ f''_a(-2a) &= \frac{2a^2}{(-a)^3} = \frac{-2}{a} \end{aligned}$$

i. Fall I: $a > 0$
Dann ist ein Maximum vorhanden bei $x = -2a$ und ein Minimum bei $x = 0$.

ii. Fall I: $a < 0$
Dann ist ein Minimum vorhanden bei $x = -2a$ und ein Maximum bei $x = 0$.

(d) Punkte:

$$\begin{aligned} f_a(0) &= 0 \\ f_a(-2a) &= \frac{(-2a)^2}{-2a + a} = -4a \end{aligned}$$

5. Untersuchen Sie die Funktion auf Wendestellen.

$$f''_a(x) = \frac{2a^2}{(x + a)^3}$$

Der Zähler wird nicht null für ein bestimmtes x. Darum gibt es keine Wendestelle.

6. Bestimmen Sie die Ortskurven der Extrempunkte.

Bei $(0|0)$ liegt ein Extremum und verändert sich nicht.

Das andere Extremum liegt auf der Ortskurve:

$$\begin{aligned} f_a(-2a) &= -4a \\ x &= -2a \\ y &= -4a \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$g(x) = 2x$$

(a) Auf dem positiven Ast von g(x) ($x > 0$ und damit $a < 0$) liegen die Minima von f(x).

(b) Auf dem negativen Ast g(x) ($x < 0$ und damit $a > 0$) liegen die Maxima von f(x).

Kapitel 9

Potenzfunktionen

9.1 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

$$f(x) = x^{-n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Der Definitionsbereich für x:

$$\mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \neq x\}$$

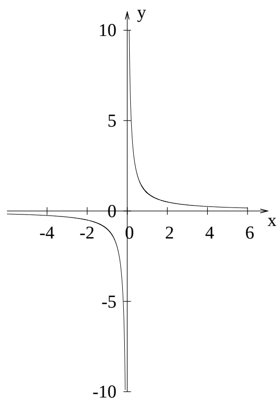


Abbildung 9.1:
$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

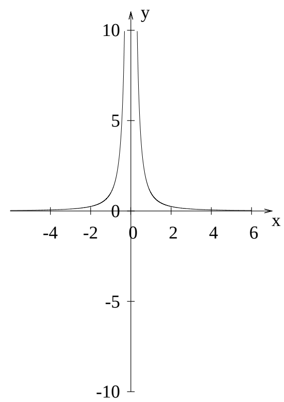


Abbildung 9.2:
$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

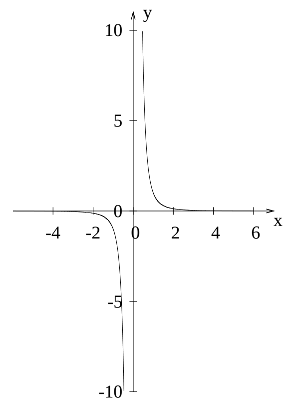


Abbildung 9.3:
$f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

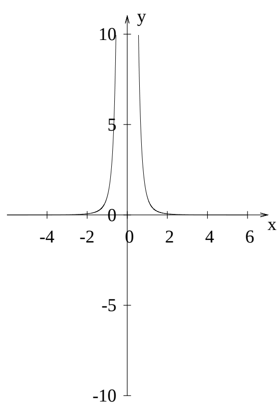


Abbildung 9.4:
$f(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$

Kapitel 10

Linearisieren

Wenn man verschiedene Messwerte hat, so kann man durch diese Messwerte nicht einfach so eine Kurve legen. Unproblematisch ist dies nur für einen Computer. Der Mensch kann mit Augenmaß nur eine Gerade vernünftig durch Messpunkte legen, so dass die Gerade von allen Messpunkten gleich weit entfernt ist. Nun sind aber die Messdaten nur in den seltensten Fällen linear.

Wir werden uns nun dem Verfahren der Linearisierung dadurch nähern, das wir uns gängige Beispiele anschauen.

10.1 Parabel

Wir simulieren in diesem Abschnitt die Messung einer Parabel ($f(x) = 9x^2 + 25$) Dann erstellen wir zwei Diagramme. In das erste Diagramm (Abb.: 10.1) tragen wir ganz normal die „gemessenen“ y-Werte gegen die x-Werte auf, in dem anderen Diagramm (Abb.: 10.2) ziehen wir erst die Wurzel aus den „Messwerten“ und tragen diese dann gegen die x-Werte auf.

Unsere „Messwerte“:

x	$y = f(x) = 9x^2 + 25$	$\sqrt{y}$
0	25	0
1	34	3
2	36	4
3	81	9
4	144	12
5	225	15
6	324	18
7	441	21
8	576	24
9	729	27
10	900	30

Die Vorgehensweise:

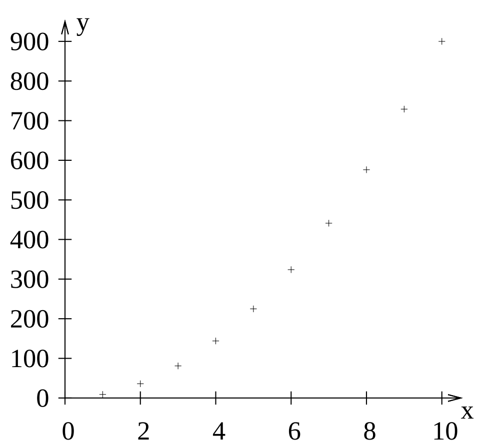


Abbildung 10.1: Die „Messdaten“ der Funktion $f(x) = 9x^2$ ergibt eine Parabel.

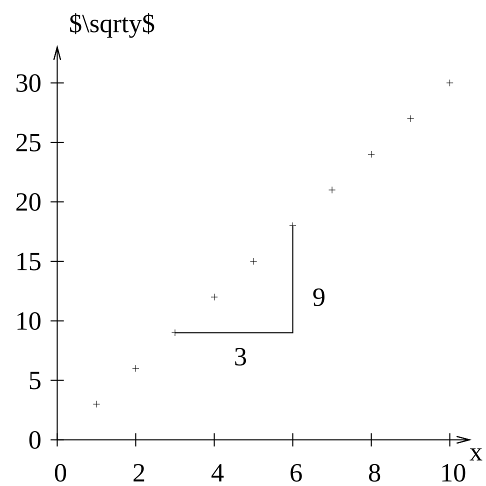


Abbildung 10.2: Die Wurzel der „Messdaten“ ($\sqrt{y}$) gegen x aufgetragen ergibt eine Gerade. Die Steigung der - nicht eingezeichneten - Geraden ist $9/3 = 3$

1. Sie vermuten, dass der Zusammenhang ein quadratischer ist. Also $y = ax^2$.
2. Dann tragen Sie $\sqrt{y}$ gegen die x-Werte auf.
3. Wenn dann eine Gerade sichtbar wird, gilt $y \sim x^2$.
4. Das Quadrat der Steigung der linearisierten Gerade ergibt den Vorfaktor vor dem x^2. Hier ist die Steigung der Geraden 3, also ist der Vorfaktor 9

$$\begin{aligned} y &= ax^2 \\ \sqrt{y} &= \sqrt{ax^2} \\ \sqrt{y} &= \sqrt{a}\sqrt{x^2} \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht eine Gerade mit der Steigung $m = \sqrt{a}$. a ist dann das Quadrat der Steigung.

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= 3 && \text{ablesen aus der Graphik} \\ m &= 9 \\ b &= 25 && \text{ablesen aus der Graphik} \end{aligned}$$

So lautet die Funktion, die sich hinter der Messung verbirgt:

$$f(x) = 9x^2 + 25$$

Man kann also zusammenfassen:
Die Funktion wird so weit umgeformt, bis eine Gerade wie $mx + b$ entsteht.

Wenn die Graphen dann jeweils eine Gerade ergeben, dann ist der jeweilige Zusammenhang gezeigt und die Parameter können bestimmt werden.

10.2 Beispiel exponentielles Wachstum

Sie haben folgende Messdaten:

x	y	$\ln(y)$
0	1,65	0,50
1	1,82	0,60
2	2,01	0,70
3	2,23	0,80
4	2,46	0,90
5	2,72	1,00
6	3,00	1,10
7	3,32	1,20
10	4,48	1,50
15	7,39	2,00

Aufgrund der Messwerte und des dazugehörigen Bildes vermuten wir ein exponentielles Wachstum.

$$y = e^{ax+b}$$
$$\ln(y) = ax + b$$

Sie erhalten auf der rechten Seite eine Gerade. b ist der y-Achsenabschnitt der Gerade, a die Steigung.
Wenn Sie den Logarithmus der Messwerte ($\ln y$) gegen x auftragen erhalten Sie eine Gerade.

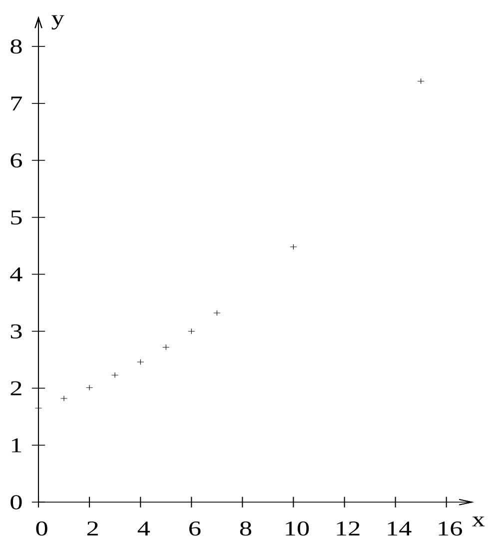


Abbildung 10.3: Die „Messdaten“ lassen ein exponentielles Wachstum vermuten.

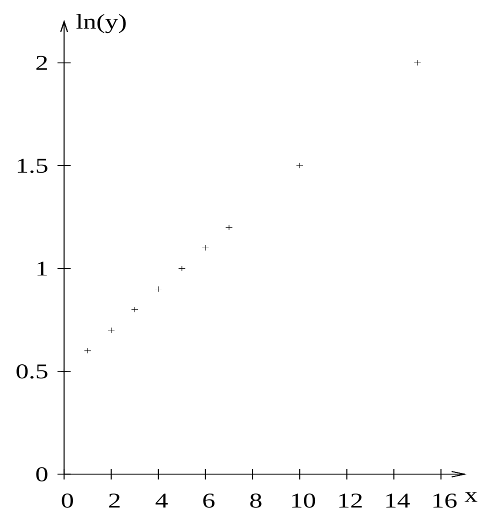


Abbildung 10.4: Der Logarithmus der „Messdaten“ ($\ln y$) gegen x aufgetragen ergibt eine Gerade. Wenn Sie die Gerade vermessen, erhalten Sie:
$g(x) = 0{,}1x + 0{,}5$

Aus der Abb. 10.4 lesen Sie die Steigung und den Achsenabschnitt ab. Der Achsenabschnitt ist 0,5 und die Steigung ist 0,1:

$$g(x) = 0{,}1x + 0{,}5$$

Somit ist die Originalfunktion ein exponentielles Wachstum:

$$f(x) = e^{0{,}1x+0{,}5}$$

10.3 Beispiel beschränktes Wachstum

Sie haben folgende Messdaten:

x	y	$\ln(5-y)$
0	3,78	0,20
1	3,89	0,10
2	4,00	0,00
3	4,10	-0,11
4	4,18	-0,19
5	4,26	-0,30
6	4,33	-0,40
7	4,39	-0,49
10	4,55	-0,80
15	4,73	-1,31
20	4,83	-1,78
25	4,90	-2,30
30	4,94	-2,81

Aufgrund der Messwerte und des dazugehörigen Bildes (Abb. 10.5) vermuten wir ein beschränktes Wachstum. Wir müssen nun zuerst eine Linearisierung herleiten:

$$\begin{aligned} y &= S - e^{-kx+b} \\ e^{-kx+b} &= S - y \\ -kx + b &= \ln(S-y) \end{aligned}$$

Sie müssen erst die Wachtumsgrenze (S) erraten. Die Wachstumsgrenze erraten wir aus dem Bild (Abb. 10.5) mit 5.
Wenn Sie $\ln(S-y)$ gegen x auftragen erhalten Sie eine Gerade (Abb. 10.6).

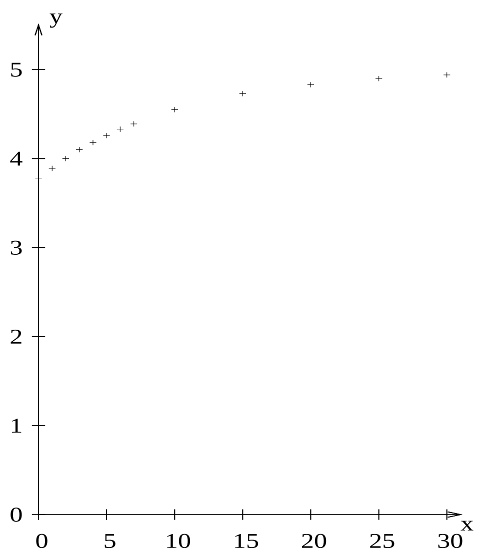


Abbildung 10.5: Die „Messdaten“ lassen ein beschränktes Wachstum mit der Schranke $S = 5$ vermuten.

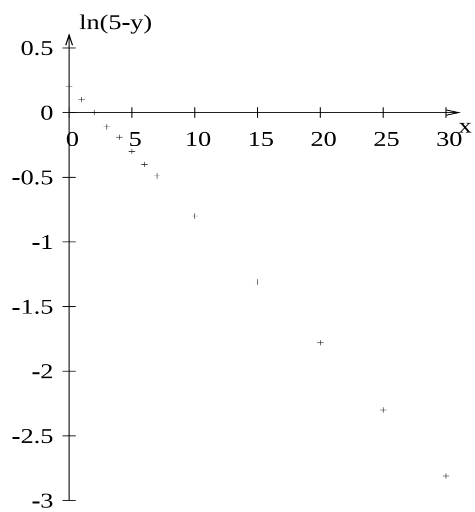


Abbildung 10.6: Der Logarithmus der „Messdaten“ $\ln(5-y)$ gegen x aufgetragen ergibt eine Gerade. Wenn Sie die Gerade vermessen, erhalten Sie:
$g(x) = -0{,}1x + 0{,}2$

Der Achsenabschnitt ist 0,5 und die Steigung ist 0,1. Somit ist die Originalfunktion ein beschränktes Wachstum:

$$f(x) = e^{-0{,}1x+0{,}2}$$

10.4 Beispiel logistisches Wachstum

Sie haben folgende Messdaten:

x	y	$\ln(\frac{1}{y}-\frac{1}{6})$
0	2,00	-1,099
1	2,86	-1,699
2	3,74	-2,299
3	4,51	-2,899
4	5,08	-3,499
5	5,46	-4,099
6	5,69	-4,699
7	5,83	-5,299
8	5,90	-5,899
9	5,95	-6,499
10	5,97	-7,099

Aufgrund der Messwerte und des dazugehörigen Bildes (Abb.: 10.7) vermuten wir ein logistisches Wachstum. Wir müssen nun zuerst eine Linearisierung herleiten. Die Rechnung ist „interessant“. Darum gibt es zu jedem Schritt Anmerkungen. Auf die Frage: „Warum gerade dieser Schritt?“ lautet die Antwort: „Damit auf einfachstem Wege eine Gerade *erscheint*“.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{S}{1+\left(\frac{S}{a}-1\right)e^{-Skx}} && \Big| \cdot \left(1+\left(\tfrac{S}{a}-1\right)e^{-Skx+b}\right)\\
y\cdot\left(1+\left(\frac{S}{a}-1\right)e^{-Skx}\right) &= S && \Big| : y\\
1+\left(\frac{S}{a}-1\right)e^{-Skx} &= \frac{S}{y} && \Big| : S\\
\frac{1}{S}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{S}\right)e^{-Skx} &= \frac{1}{y} && \Big| -\tfrac{1}{S}\\
\underbrace{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{S}\right)}_{\text{konstant}}e^{-Skx} &= \frac{1}{y}-\frac{1}{S} && \Big| \ln()
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{S}\right)e^{-Skx}\right) &= \ln\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{S}\right) && \Big| \text{ Regel: } \ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)\\
\ln\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{S}\right)+\ln\left(e^{-Skx}\right) &= \ln\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{S}\right) && \Big| \text{ Regel: } \ln(e^b)=b\\
\ln\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{S}\right)-Skx &= \ln\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{S}\right) && \Big| \text{ Links steht eine Gerade}\\
\underbrace{-Sk}_{m}x+\underbrace{\ln\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{S}\right)}_{b} &= \ln\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{S}\right) && \Big| \text{ Vergl. mit: } mx+b
\end{aligned}
$$

Hier müssen Sie wieder erst die Wachtumsgrenze (S) erraten.

Aus der Steigung m, die Sie aus dem Bild ermitteln, können Sie dann durch Vergleich k errechnen:

$$\begin{aligned} -Sk &= m \\ k &= \frac{-m}{S} \end{aligned}$$

Aus dem y-Achsenabschnitt b können Sie dann a ermitteln:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{S}\right) &= b \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{S} &= e^b \\ \frac{1}{a} &= e^b + \frac{1}{S} \\ \frac{1}{a} &= \frac{S\,e^b}{S} + \frac{1}{S} \\ \frac{1}{a} &= \frac{S\,e^b + 1}{S} \\ a &= \frac{S}{S\,e^b + 1} \end{aligned}$$

Die Wachstumsgrenze erraten wir aus dem Bild mit 6.

Wenn Sie $\ln(\frac{1}{y} - \frac{1}{6})$ gegen x auftragen erhalten Sie eine Gerade. Der Achsenabschnitt ist -1,1 und die Steigung ist -0,6:

$$\begin{aligned} g(x) &= -0{,}6 - 1{,}1 \\ a &= \frac{6}{6 \cdot e^{-1{,}1} + 1} \\ &= 2 \\ k &= \frac{-(-0{,}6)}{6} \\ &= 0{,}1 \end{aligned}$$

Somit ist die Originalfunktion eine logistische Wachstumsfunktion:

$$f(x) = \frac{6}{1 + 2\,e^{-0{,}6x}}$$

(Der Vorfaktor der e-Funktion beträgt $\frac{S}{a} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 2$.)

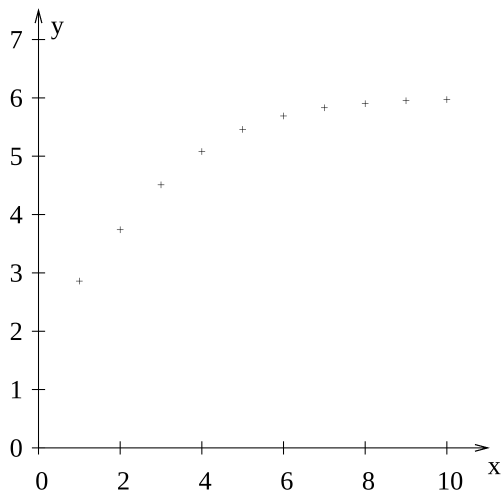


Abbildung 10.7: Die „Messdaten“ lassen ein logistisches Wachstum mit der Schranke $S = 6$ vermuten.

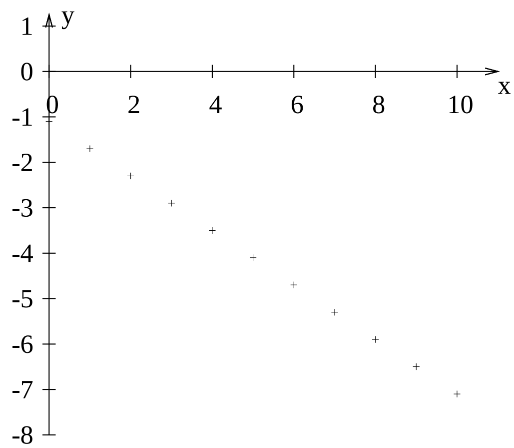


Abbildung 10.8: $(\ln(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}))$ gegen x aufgetragen ergibt eine Gerade. Wenn Sie die Gerade vermessen, erhalten Sie: $g(x) = -0{,}6x - 1{,}1$

10.5 Arbeitsblätter

10.6 Bevölkerung - Deutschland

Die Bevölkerungsentwicklung Deutschlands.

Jahr	Bevölkerung, in Tsd.
1871	40.997
1880	45.095
1890	49.241
1900	56.046
1910	64.568
1925	63.166
1935	68.871
1939[a]	69.314
1950	69.346
1960	73.147

Jahr	Bevölkerung, in Tsd.
1970	78.069
1980	78.397
1990	79.753
2000	82.260
2001	82.440
2002	82.537
2003	82.532
2004	82.501
2005	82.438
2006	82.315

[a] Gebietsstand: 31.12.1937

Tabelle 10.1: *Quelle:* Statistisches Bundesamt: Statistisches Jahrbuch 2007, Lange Reihen. Von 1871 bis 1939 Reichsgebiet. Ab 1950 sind die Bevölkerungszahlen für Westdeutschland und Ostdeutschland zusammengefasst.

Die Daten aus Tabelle: 10.1 sind in Abb.: 10.9 dargestellt.

Nehmen Sie 83 Millionen als Grenze der Bevölkerung. Lassen Sie Ihre Jahreszählung bei 1860 beginnen. $x = 0$ entspricht dann dem Jahr 1860.

1. **Modell: Lineares Wachstum**
   (a) Bestimmen Sie aus Abb.: 10.9 eine lineare Funktion: $linW$.
   (b) Bestimmen Sie aus der Funktion $linW$, wann die Bevölkerungszahl null betrug.

2. **Modell: Beschränktes Wachstum**
   In Abb. 10.10 ist die Jahreszahl gegen $\ln(83 - y)$ aufgetragen.
   (a) Bestimmen Sie aus Abb. 10.10 eine beschr. Wachstumsfunktion: $beschW$.
   (b) Bestimmen Sie aus dieser Funktion, wann die Bevölkerungszahl null betrug.

3. **Modell: Logistisches Wachstum**
   In Abb. 10.11 ist die Jahreszahl gegen $\ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{83}\right)$ aufgetragen.
   (a) Bestimmen Sie aus Abb. 10.11 eine log. Wachstumsfunktion: $logW$.
   (b) Bestimmen Sie aus der Funktion $logW$, wie groß die Bevölkerungszahl im Jahre null war.

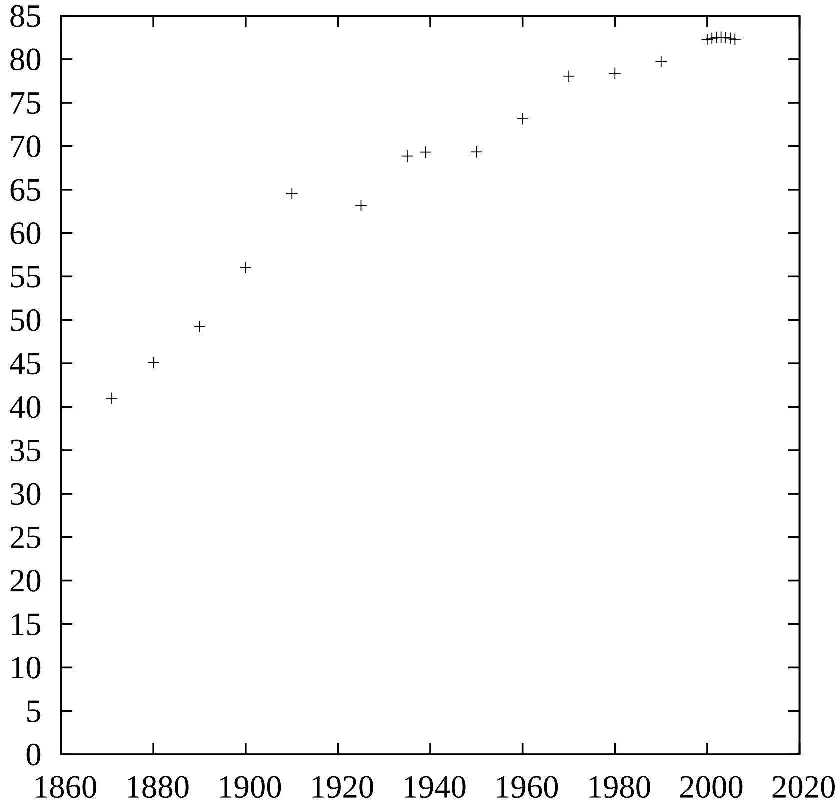


Abbildung 10.9: Die Bevölkerungsentwicklung „Deutschlands“.

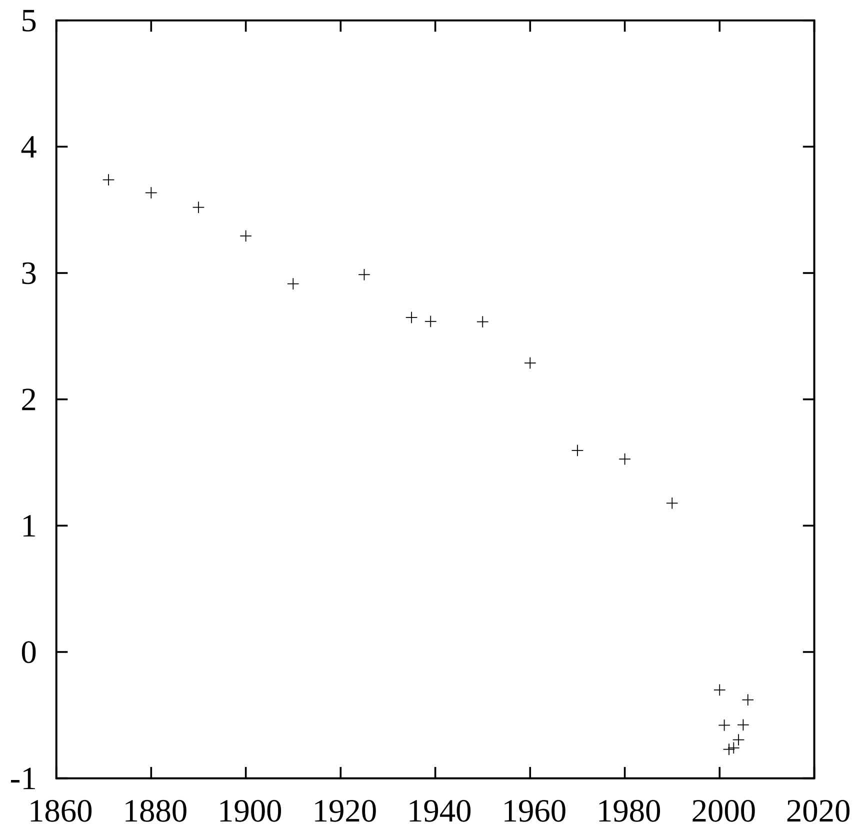


Abbildung 10.10: Die Bevölkerungsentwicklung „Deutschlands“. $\ln(83 - y)$ gegen x aufgetragen.

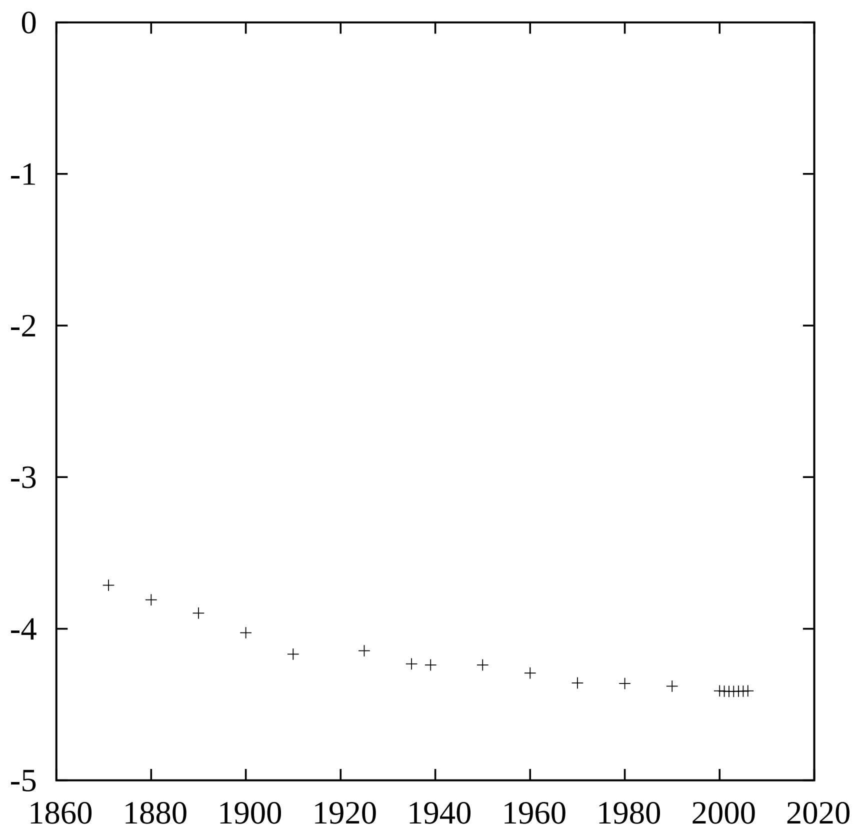


Abbildung 10.11: Die Bevölkerungsentwicklung „Deutschlands“. $\ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{83}\right)$ gegen x aufgetragen.

10.7 Bevölkerung - Deutschland – Lösung

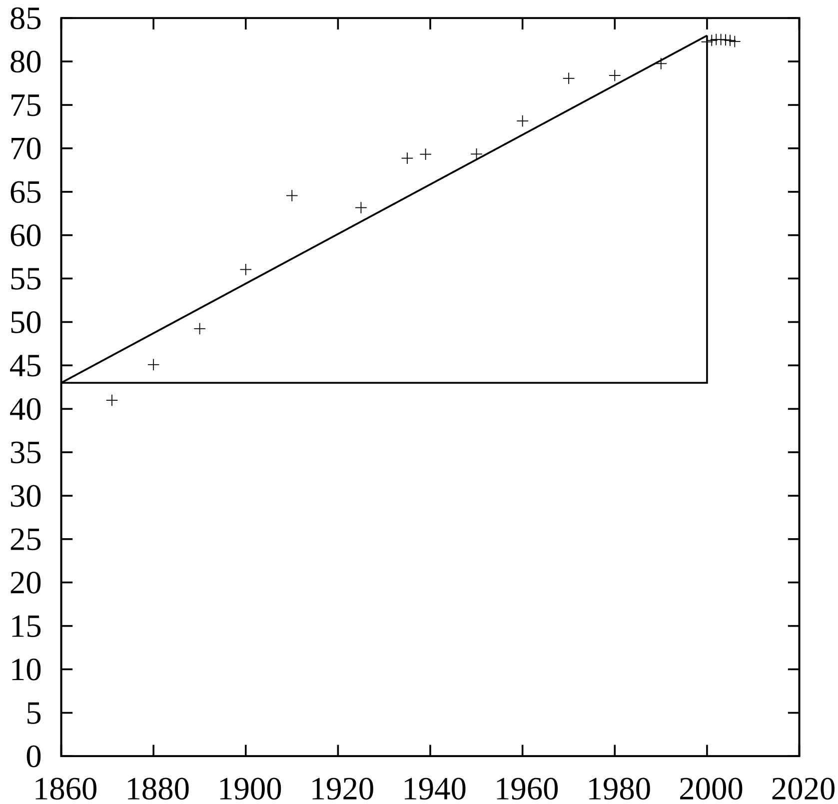


Abbildung 10.12: Die Bevölkerungsentwicklung „Deutschlands" versehen mit einer Ausgleichsgeraden und einem Steigunsdreieck: $\Delta y = 40$, $\Delta x = 140$. Der y-Achsenabschnitt ist 43.

Nehmen Sie 83 Millionen als Grenze der Bevölkerung für das beschränkte und logistische Wachstum. Lassen Sie Ihre Jahreszählung bei 1860 beginnen. $x = 0$

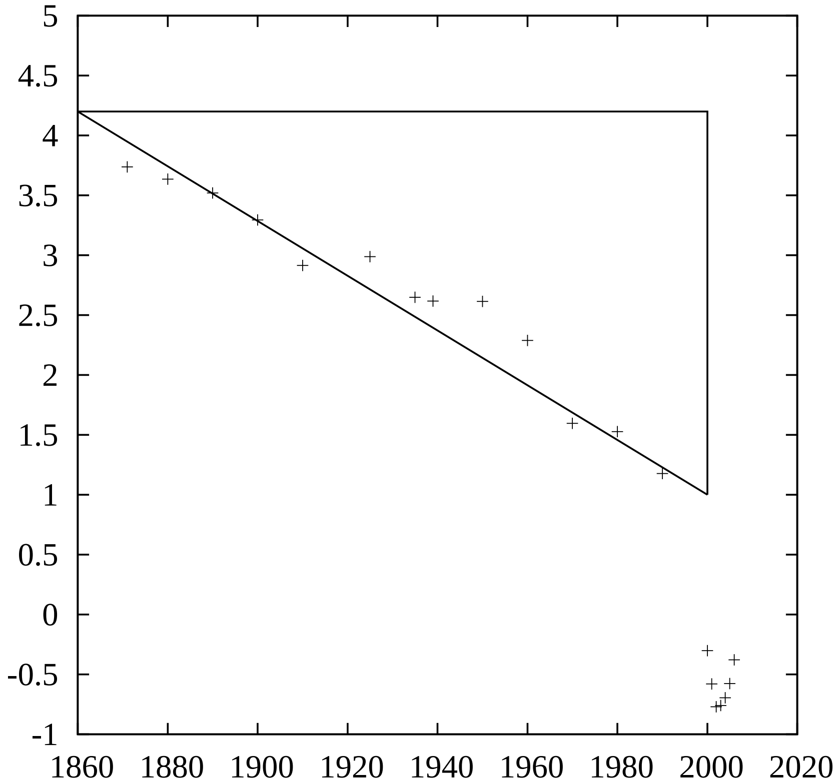


Abbildung 10.13: Die Bevölkerungsentwicklung „Deutschlands“. Der Logarithmus der „Messdaten“ $\ln(83 - y)$ gegen x aufgetragen. Die Ausgleichsgerade und ihr Steigungsdreieck: $\Delta y = -3{,}2$, $\Delta x = 140$. Der y-Achsenabschnitt ist -4,2.

entspricht dann dem Jahr 1860.

1. **Modell: Lineares Wachstum**

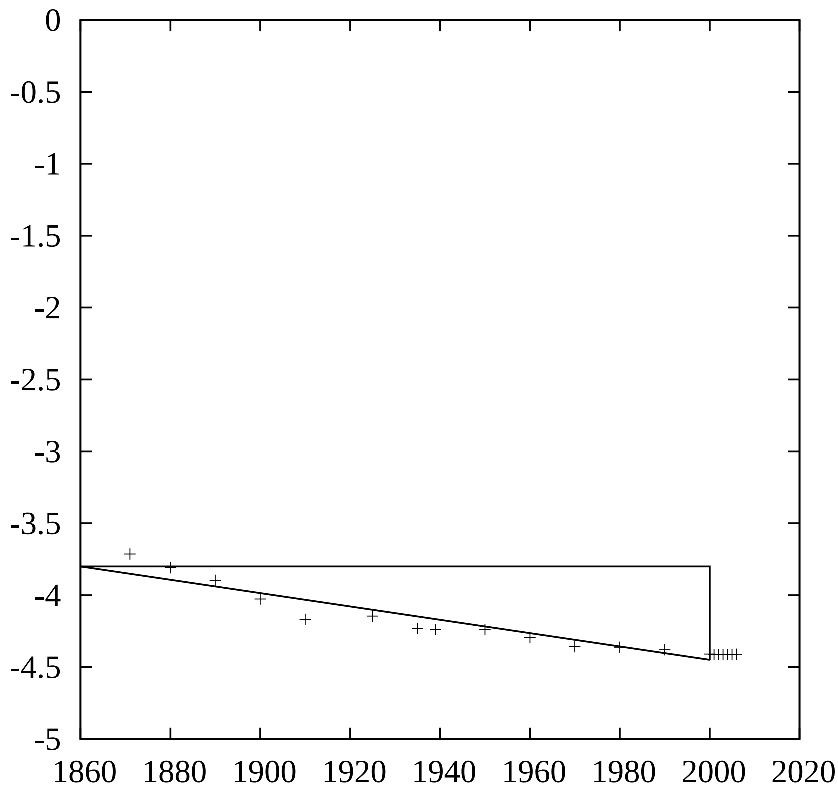


Abbildung 10.14: Die Bevölkerungsentwicklung „Deutschlands“. Der Logarithmus der „Messdaten“ $\ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{83}\right)$ gegen x aufgetragen. Die Ausgleichsgerade und ihr Steigungsdreieck: $\Delta y = -0{,}65$, $\Delta x = 140$. Der y-Achsenabschnitt ist -3,8.

Nehmen Sie „naiv“ an, dass die Bevölkerungsentwicklung linear verläuft.

(a) Bestimmen Sie aus Abb.: 10.9 eine lineare Funktion $linW$.

Lösung
Eine Ausgleichsgerade ist in Abb.: 10.12 eingezeichnet.
Aus dem Bild erkennt man:

$$m\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40}{140} \approx 0{,}286$$

$$b = 43$$

Damit ergibt sich die lineare Funktion zu:

$$linW(x) = 0{,}286x + 43$$

(b) Bestimmen Sie aus der Funktion $linW$, wann die Bevölkerungszahl null betrug.

$$\begin{aligned} linW(x) &= 0 \\ 0{,}286x + 43 &= 0 \\ x &= \frac{-43}{0{,}286} \\ &\approx -150 \\ \text{Jahr} &= 1860 - 150 \\ &= 1710 \end{aligned}$$

Im Jahre 1710 war die Einwohnerzahl Deutschlands nach diesem Modell null.

2. **Modell: Beschränktes Wachstum**
In Abb. 10.13 ist die Jahreszahl gegen $\ln(83 - y)$ aufgetragen.

(a) Bestimmen Sie aus der Abb. 10.10 eine beschränkte Wachtumsfunktion $beschW$.

$$\begin{aligned} S &= 83 \\ m &= \frac{-3{,}2}{140} \\ &= -0{,}023 \\ b &= -4{,}2 \end{aligned}$$

$$beschW(x) = 83 - e^{-0{,}023x-4{,}2}$$

(b) Bestimmen Sie aus der Funktion $beschW$, wann die Bevölkerungszahl null betrug.

$$\begin{aligned} beschW(x) &= 0 \\ 83 - e^{-0{,}023x-4{,}2} &= 0 \\ 83 &= e^{-0{,}023x-4{,}2} \\ \ln(83) &= -0{,}023x - 4{,}2 \\ \ln(83) + 4{,}2 &= -0{,}023x \\ x &\approx -375 \end{aligned}$$

Im Jahre (1860 - 375 = 1485) war die Bevölkerung null.

3. **Modell: Logistisches Wachstum**
In Abb. 10.11 ist die Jahreszahl gegen $\ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{83}\right)$ aufgetragen.

(a) Bestimmen Sie aus der Abb. 10.11 eine logistische Wachtumsfunktion $logW$.

$$\begin{aligned} S &= 83 \\ m &= \frac{-0{,}65}{140} \\ &\approx -0{,}0046 \\ -Sk &\approx -0{,}0046 \\ b &= -3{,}8 \\ a &= \frac{S}{S\,e^{b} + 1} \\ &\approx 29 \end{aligned}$$

$$logW(x) = \frac{83}{1 + 1{,}86\,e^{-0{,}0046x}}$$

(b) Bestimmen Sie aus der Funktion $logW$, wie groß die Bevölkerungszahl im Jahre null war.

$$logW(-1860) = 0{,}009$$

Das sind schlicht 9 Personen.

Anhang A

Glossar

Intervall (= Bereich). Gibt einen Bereich für eine Variable an: Man unterscheidet bei den Intervallen zwischen offenen, halboffenen und geschlossenen Intervallen. Die eckigen Klammern[1] werden bei geschlossenen Intervallen verwendet, wenn die Zahl zum Intervall dazugehört. Die runden Klammern werden bei offenen Intervallen verwendet, wenn die Zahl nicht zum Intervall dazugehört.

Wenn ∞ ins Spiel kommt, wird immer eine runde Klammer verwendet.

(Das Semikolon trennt die Zahlen hier, um keine Verwechslung aufkommen zu lassen mit dem Komma.)

- $$x \in \mathbb{N}, \qquad x \in [3; 6]$$
  x kann eine natürliche Zahl im Intervall von 3 bis 6 sein: x = 3; 4; 5; 6
- $$x \in \mathbb{N}, \qquad x \in (3; 6]$$
  x kann eine natürliche Zahl zwischen 3 und 5 - ohne die 3 sein: x = 4; 5; 6
- $$x \in \mathbb{N}, \qquad x \in (3; 6)$$
  x kann eine natürliche Zahl zwischen 3 und 6 sein: x = 4; 5.
- $$x \in \mathbb{R}, \qquad x \in [3; 6)$$
  x kann eine reelle Zahl zwischen 3 und 6, ohne die 6 sein. Mögliche Zahlenwerte für x sind: 3; 3,5; 5; 5,8; 5,999.

[1] Unterschiedliche Bücher und Autoren handhaben dies unterschiedlich. Manchmal werden offene Intervallgrenzen auch durch eine umgekehrte eckige Klammer dargestellt: $]3; 5[$. Wir folgen hier z. B. Bronstein, Taschenbuch der Mathematik.

- $$x \in \mathbb{R}, \qquad x \in [3; \infty)$$

  x kann jede reelle Zahl sein, die 3 oder größer ist.

Monotonie Beschreibt einen Funktionsgraphen:

- Wenn eine Funktion ständig steigt ist sie **streng monoton steigend**:

$$f'(x) > 0$$

- Wenn eine Funktion ständig fällt ist sie **streng monoton fallend**:

$$f'(x) < 0$$

- Wenn eine Funktion ständig steigt aber manchmal auch parallel zur x-Achse verläuft ist sie **monoton steigend**:

$$f'(x) \geq 0$$

- Wenn eine Funktion ständig fällt aber manchmal auch parallel zur x-Achse verläuft ist sie **monoton fallend**:

$$f'(x) \leq 0$$

Manchmal untersucht man auch nur ein Intervall (Bereich). Dann sagt man z.B., dass die Funktion in dem Intervall monoton steigend sei.

Wenn eine Funktion streng monoton fallend oder steigend ist, dann gibt es zu jedem y-Wert nur einen x-Wert. Dann kann man auch eine Umkehrfunktion bilden.

$$f(x) = x^2, \qquad x \geq 0, \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Zu f kann man nur für die einzelnen Äste (positiv oder negativ) eine Umkehrfunktion angeben.

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = \log_2(x)$$

2^x ist streng monoton steigend, also gibt es auch eine Umkehrfunktion auf dem ganzen Definitionsbereich.

Polynom Ein Polynom ist eine Summe. Jeder Summand besteht aus einer Zahl und einem x mit einer Potenz. Diese Potenz darf nicht negativ sein und muss aus den natürlichen Zahlen sein.

Beispiele, die **keine** Polynome sind:

- $$f(x) = \frac{1}{x}$$
- $$f(x) = 3^x$$
- $$f(x) = \sin(x)$$

Beispiele für Polynome:

- $$f(x) = 3x^2 + 2$$
- $$f(x) = x^5 - 2x$$

Polynom Ein Polynom ist eine Summe. Jeder Summand besteht aus einer Zahl und einem x mit einer Potenz. Diese Potenz darf nicht negativ sein und muss aus den natürlichen Zahlen sein.

Beispiele, die **keine** Polynome sind:

- $$f(x) = \frac{1}{x}$$
- $$f(x) = 3^x$$
- $$f(x) = \sin(x)$$

Beispiele für Polynome:

- $$f(x) = 3x^2 + 2$$
- $$f(x) = x^5 - 2x$$

stetig Eine Funktion ist stetig für alle reellen Zahlen, wenn man sie ohne abzusetzen von ganz links bis ganz rechts zeichnen kann. (stetig auf $\mathbb{R}$)

Eine Funktion ist stetig auf einem Intervall, wenn man die Funktion ohne abzusetzen von der linken bis zur rechten Intervallgrenze zeichnen kann.

Wertebereich Die Wertemenge, welche die y-Werte annehmen können.

Beispiele:

- $$f(x) = x^2 + 1 \qquad \mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$$

- $$f(x) = -x^3 + 1 \qquad \mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R}\}$$

- $$f(x) = 2^x \qquad \mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$$

Anhang B

Tabellen

B.1 e

e = 2, 7 1 8 2 8 1 8 2 8 4 5 9 0 4 5 2 3 5 3 6 0 2 8 7 4 7 1 3 5 2 6 6 2 4 9 7 7 5 7 2
4 7 0 9 3 6 9 9 9 5 9 5 7 4 9 6 6 9 6 7 6 2 7 7 2 4 0 7 6 6 3 0 3 5 3 5 4 7 5 9 4 5 7 1
3 8 2 1 7 8 5 2 5 1 6 6 4 2 7 4 2 7 4 6 6 3 9 1 9 3 2 0 0 3 0 5 9 9 2 1 8 1 7 4 1 3 5
9 6 6 2 9 0 4 3 5 7 2 9 0 0 3 3 4 2 9 5 2 6 0 5 9 5 6 3 0 7 3 8 1 3 2 3 2 8 6 2 7 9 4
3 4 9 0 7 6 3 2 3 3 8 2 9 8 8 0 7 5 3 1 9 5 2 5 1 0 1 9 0 1 1 5 7 3 8 3 4 1 8 7 9 3 0
7 0 2 1 5 4 0 8 9 1 4 9 9 3 4 8 8 4 1 6 7 5 0 9 2 4 4 7 6 1 4 6 0 6 6 8 0 8 2 2 6 4 8
0 0 1 6 8 4 7 7 4 1 1 8 5 3 7 4 2 3 4 5 4 4 2 4 3 7 1 0 7 5 3 9 0 7 7 7 4 4 9 9 2 0 6
9 5 5 1 7 0 2 7 6 1 8 3 8 6 0 6 2 6 1 3 3 1 3 8 4 5 8 3 0 0 0 7 5 2 0 4 4 9 3 3 8 2 6
5 6 0 2 9 7 6 0 6 7 3 7 1 1 3 2 0 0 7 0 9 3 2 8 7 0 9 1 2 7 4 4 3 7 4 7 0 4 7 2 3 0 6
9 6 9 7 7 2 0 9 3 1 0 1 4 1 6 9 2 8 3 6 8 1 9 0 2 5 5 1 5 1 0 8 6 5 7 4 6 3 7 7 2 1 1
1 2 5 2 3 8 9 7 8 4 4 2 5 0 5 6 9 5 3 6 9 6 7 7 0 7 8 5 4 4 9 9 6 9 9 6 7 9 4 6 8 6 4
4 5 4 9 0 5 9 8 7 9 3 1 6 3 6 8 8 9 2 3 0 0 9 8 7 9 3 1 2 7 7 3 6 1 7 8 2 1 5 4 2 4 9
9 9 2 2 9 5 7 6 3 5 1 4 8 2 2 0 8 2 6 9 8 9 5 1 9 3 6 6 8 0 3 3 1 8 2 5 2 8 8 6 9 3 9
8 4 9 6 4 6 5 1 0 5 8 2 0 9 3 9 2 3 9 8 2 9 4 8 8 7 9 3 3 2 0 3 6 2 5 0 9 4 4 3 1 1 7
3 0 1 2 3 8 1 9 7 0 6 8 4 1 6 1 4 0 3 9 7 0 1 9 8 3 7 6 7 9 3 2 0 6 8 3 2 8 2 3 7 6 4
6 4 8 0 4 2 9 5 3 1 1 8 0 2 3 2 8 7 8 2 5 0 9 8 1 9 4 5 5 8 1 5 3 0 1 7 5 6 7 1 7 3 6
1 3 3 2 0 6 9 8 1 1 2 5 0 9 9 6 1 8 1 8 8 1 5 9 3 0 4 1 6 9 0 3 5 1 5 9 8 8 8 8 5 1 9
3 4 5 8 0 7 2 7 3 8 6 6 7 3 8 5 8 9 4 2 2 8 7 9 2 2 8 4 9 9 8 9 2 0 8 6 8 0 5 8 2 5 7
4 9 2 7 9 6 1 0 4 8 4 1 9 8 4 4 4 3 6 3 4 6 3 2 4 4 9 6 8 4 8 7 5 6 0 2 3 3 6 2 4 8 2
7 0 4 1 9 7 8 6 2 3 2 0 9 0 0 2 1 6 0 9 9 0 2 3 5 3 0 4 3 6 9 9 4 1 8 4 9 1 4 6 3 1 4
0 9 3 4 3 1 7 3 8 1 4 3 6 4 0 5 4 6 2 5 3 1 5 2 0 9 6 1 8 3 6 9 0 8 8 8 7 0 7 0 1 6 7
6 8 3 9 6 4 2 4 3 7 8 1 4 0 5 9 2 7 1 4 5 6 3 5 4 9 0 6 1 3 0 3 1 0 7 2 0 8 5 1 0 3 8
3 7 5 0 5 1 0 1 1 5 7 4 7 7 0 4 1 7 1 8 9 8 6 1 0 6 8 7 3 9 6 9 6 5 5 2 1 2 6 7 1 5 4
6 8 8 9 5 7 0 3 5 0 3 5 4 0 2 1 2 3 4 0 7 8 4 9 8 1 9 3 3 4 3 2 1 0 6 8 1 7 0 1 2 1 0
0 5 6 2 7 8 8 0 2 3 5 1 9 3 0 3 3 2 2 4 7 4 5 0 1 5 8 5 3 9 0 4 7 3 0 4 1 9 9 5 7 7 7
7 0 9 3 5 0 3 6 6 0 4 1 6 9 9 7 3 2 9 7 2 5 0 8 8 6 8 7 6 9 6 6 4 0 3 5 5 5 7 0 7 1 6
2 2 6 8 4 4 7 1 6 2 5 6 0 7 9 8 8 2 6 5 1 7 8 7 1 3 4 1 9 5 1 2 4 6 6 5 2 0 1 0 3 · · ·